

**BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2009. NOVEMBER 21.)**

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

3. osztály

1. feladat (2 pont):

40 rózsát el lehet-e osztani 5 lány között úgy, hogy mindegyik lánynak páratlan számú rózsája jusson?

Megoldás:

Nem lehet. (1 pont) Öt darab páratlan szám összege páratlan, a 40 páros (1 pont).

2. feladat (5 pont):

Hogyan tudnátok egy 40 méteres kötéll segítségével pontosan 25 métert kimérni?

Megoldás:

Először összefogom a két végét, ezáltal lemérek 20 métert. (2 pont)

Ezután az egyik 20 méteres részt még kétszer egymásután, a két végénél összefogom (2 pont), és így $20:4=5$ méter lesz még kimérve (1 pont).

3. feladat (3 pont):

Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelyben a számjegyek összege 20?

Megoldás:

A 299. (2 pont). Minél kevesebb számjegyű egy szám, annál kisebb az értéke. Legkevesebb számjegy segítségével akkor lesz az összeg 20, ha a lehető legtöbb 9-es szerepel benne. Kettőnél több kettes nem lehet, mert $9 + 9 + 9 = 27 > 20$, így pontosan két 9-esnek kell benne lennie: $9 + 9 + 2 = 20$. A kisebb számjegyeknek kell nagyobb helyiértéken állnia (1 pont).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2009. NOVEMBER 21.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

4. osztály

1. feladat (2 pont):

Hogyan tudnátok egy 7 perces és egy 5 perces homokórával 13 percet kimérni?

Megoldás:

Egyszerre indítjuk mindkét homokórát. Lemegy az 5 perces, megfordítom. Lemegy a 7 perces, megfordítom. Lemegy másodszor az 5 perces. Ekkor már 10 perc telt el (1 pont), és a 7 percesből most lement 3 perc. A 7 percest megfordítom, mire lepereg a homok, eltelt a 13 perc (1 pont).

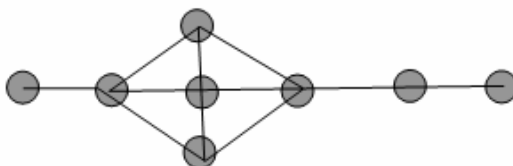
Más helyes megoldásra is jár a 2 pont.

2. feladat (5 pont):

Tervezzetek vasútvonalat, amelynek 8 állomása közül kettőről csak 1 irányba, egyről 2 irányba, kettőről 3 irányba, háromról 4 irányba lehet utazni egyenes pályaszakaszokkal, és bármelyik állomásról bármelyik másikra el lehet jutni!

Megoldás:

Lásd az ábrát:



Rendre járnak az adott részleteket teljesítő ábrákért a jelölt pontok: ha 8 állomása van, közülük pontosan kettőről csak 1 irányba (1 pont), pontosan egyről 2 irányba (1 pont), kettőről 3 irányba (1 pont), háromról 4 irányba (1 pont) lehet utazni egyenes pályaszakaszokkal és bármelyik állomásról bármelyik másikra el lehet jutni (1 pont).

3. feladat (3 pont):

Egy betegnek fél óránként kell bevennie egy-egy szem orvosságot, összesen 12-t. Mennyi idő telik el az első és az utolsó szem bevétele között?

Megoldás:

12 orvosság beszedése 11 „szedésközzel“ történik (2 pont). 11 fél óra = 5 és fél óra (1 pont).

**BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2009. NOVEMBER 21.)**

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

5. osztály

1. feladat (2 pont):

Egy szobában 7 szék van egy sorban egymás mellett. A székek kezdetben üresek. Időnként valaki bejön a szobába, leül egy üres székre, és ugyanekkor egyik szomszédja (ha van) föláll és kimegy. Legfeljebb hány szék lehet foglalt egyszerre a szobában?

Megoldás:

Legfeljebb 6 (1 pont). Előlről töltik fel úgy, hogy a második nem az első szomszédjába, hanem egy székkal odébb ül, majd a 3. közéjük az üres székre ül, és feláll a 3. széken ülő. Az ezután bejövő a 4. székre ül (senkinek nem kell felállnia). A következő bejövő a 3. székre ül és kimegy a 4. széken ülő. Az új bejövő az 5. székre ül, stb. (1 pont)

2. feladat (5 pont):

Hány darab golyónk van az egyes színekből, ha zöldből és pirosból 28, zöldből és fehérből 44, pirosból és fehérből pedig 54 darab van?

Megoldás:

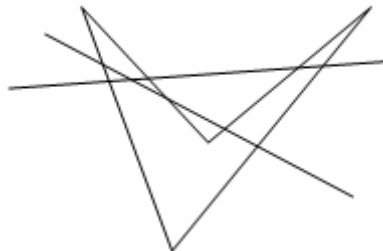
A 28, 44 és 54 összege, ami 126, mindegyik színű golyó kétszeri jelenlétéből áll elő. Így a háromféle színű golyók száma $126 : 2 = 63$ (1 pont). Innen rendre megkapjuk a zöldek számát: $63 - 54 = 9$ (1 pont), a pirosak számát: $63 - 44 = 19$ (1 pont) és a fehérek számát: $63 - 28 = 35$ (1 pont). Ellenőrizve a 9, 19, 35 megfelel a feltételeknek (1 pont).

3. feladat (3 pont):

Vághat-e két egyenes egy négyszöget 6 részre?

Megoldás:

Igen (1 pont), lásd az ábrát (2 pont).



**BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2009. NOVEMBER 21.)**

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

6. osztály

1. feladat (2 pont):

Öt egymást követő természetes szám közül három páros szám. A páros és páratlan számok összegének a különbsége 36. Melyik ez az öt szám?

Megoldás:

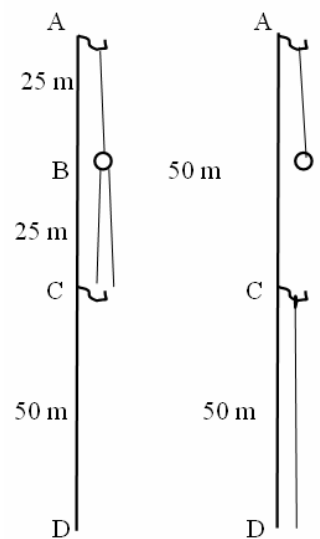
A 34, 35, 36, 37, 38 (1 pont). Helyes indoklás (1 pont).

2. feladat (5 pont):

Egy hegymászó egy 100 m magas sziklafalon szeretne lemászni. Egy 50 és egy 25 méteres kötele van és elegendő mennyiségű fémkarikája. A sziklafal tetején és az 50 m-es magasságban egy-egy kampó van beütve, amiket használhat (más kampó nincs). Hogyan juthat le ugrás, zuhanás nélkül ezen a sziklafalon?

Megoldás:

A felső kampóba beköti a 25 méteres kötelet (1 pont) és annak a végére egy olyan hurkot csinál, amelyen átveti az 50 méteres kötelet úgy, hogy annak mindkét vége lefelé lógjon (1 pont). Tehát innen duplán van a kötel, így ez újabb 25 méter. Ezzel eléri az 50 méter magasan lévő kampót (1 pont), ahova beköti az ötven méteres kötel egyik végét (1 pont). Itt megkapaszkodva, kihúzhatja az 50 méteres kötelet (az átcúszik a 25 méteres kötel végén lévő hurkon) és lelógatva lejut rajta a sziklafal aljáig (1 pont).



3. feladat (3 pont):

Ha 3 tyúk 3 nap alatt 3 tojást tojik, akkor 6 tyúk 6 nap alatt hány tojást tojik?

Megoldás:

Ekkor 1 tyúk 3 nap alatt 1 tojást tojik (1 pont). Így 6 tyúk 3 nap alatt 6 tojást (1 pont), ezért 6 tyúk 6 nap alatt 12 tojást tojik (1 pont).

**BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2009. NOVEMBER 21.)**

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

7. osztály

1. feladat (2 pont):

Az ABC háromszög AB , BC és AC oldalainak felezőpontjai rendre M , N és P . Mutassátok meg, hogy:
 $AN + BP + CM < AB + BC + AC$

Megoldás:

Minden súlyvonal hossza kisebb a vele egy csúcsból induló két oldal átlagánál. Ezt igazolhatjuk a háromszög paralelogrammává való kiegészítésével. (tükrözzük a háromszöget az oldal felezőpontjára) (1 pont). Így:

$$AN + BP + CM < \frac{AB + AC}{2} + \frac{BC + BA}{2} + \frac{CA + CB}{2} = AB + BC + AC. \text{ (1 pont)}$$

2. feladat (5 pont):

Egy apától megkérdezték, hogy hány fia van. Így válaszolt: „3 fiam van. Ha az életkorukat összeszorom, 36-ot kapok, ha az életkorukat összeadom, 13-at kapok. Amikor a kicsi született, a két nagyobbat leküldtük a nagyszülőkhöz.” Hány évesek a gyerekek?

Megoldás:

$36 = 1 \cdot 1 \cdot 36$, $1+1+36=38$, nem 13.

$36 = 1 \cdot 2 \cdot 18$, $1+2+18=21$, nem 13.

$36 = 1 \cdot 3 \cdot 12$, $1+3+12=16$, nem 13.

$36 = 1 \cdot 4 \cdot 9$, $1+4+9=14$, nem 13.

$36 = 1 \cdot 6 \cdot 6$, $1+6+6=13$.

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 9$, $2+2+9=13$.

$36 = 2 \cdot 3 \cdot 6$, $2+3+6=11$, nem 13.

$36 = 3 \cdot 3 \cdot 4$, $3+3+4=10$, nem 13.

(Minden tényezőre bontás 0,5 – 0,5 pont)

A 2, 2, 9-nél nincs, az 1, 6, 6-nál van két legnagyobb.

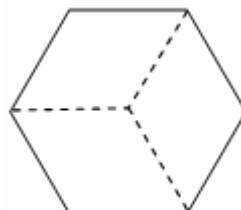
Így az életkoruk 1, 6, 6 év. (1 pont).

3. feladat (3 pont):

Osszátok fel a szabályos hatszöget 3 egyenes szakasszal 3 egybevágó négyszögre!

Megoldás:

Lásd az ábrát (3 pont).



**BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2009. NOVEMBER 21.)**

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

8. osztály

1. feladat (2 pont):

Lehet-e négyzetszám az $A = \overline{abab}$ tízes számrendszerben felírt négyjegyű szám?

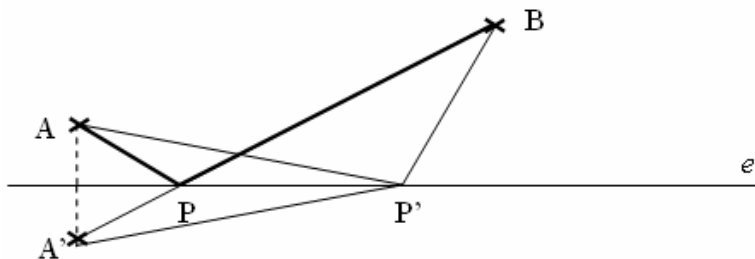
Megoldás:

$A = 1010 \cdot a + 101b = 101 \cdot (10a+b) = 101 \cdot \overline{ab}$ (1 pont). Mivel a 101 prímszám, a tényezők között még páratlanszor van szükség rá, ám a másik tényező kétjegyű, kevesebb 101-nél, ezért nem lehet (1 pont).

2. feladat (5 pont):

Az e egyenes által meghatározott egyik félsíkban adott két pont: A és B . Határozzátok meg az e egyenesnek azt a P pontját, amelyre a $PA + PB$ összeg legkisebb!

Megoldás:



Legyen A' az A -nak e -re vonatkozó tükörképe (1 pont). Ekkor az e egyenes bármely P' pontja esetén $P'A = P'A'$ (1 pont), így $P'A + P'B = P'A' + P'B$. (1 pont)

A' és B között a legrövidebb vonal az egyenes, ezért PA' -nek az e egyenessel való metszéspontja P (1 pont).

$PA + PB = PA' + PB < P'A' + P'B = P'A + P'B$ (1 pont)

3. feladat (3 pont):

Egy kör alakú asztalnál 77-en ülnek, s mindenki gondol egy egész számra, majd mindenki felírja egy cédulára két szomszédja számának összegét. Miért nem állhat minden cédulán 2009?

Megoldás:

Ha minden cédulán 2009 állna, akkor ez a 77 cédulán álló 77 szám összege $77 \cdot 2009$ volna, ami páratlan szám (1 pont). De ebben a 77 számnak az összegében mindegyik gondolt szám kétszer fordulna elő, ami viszont páros szám (1 pont). Ellentmondás, ezért nem állhat minden cédulán 2009 (1 pont).