BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2009. NOVEMBER 21.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

3. osztály

1. feladat (*2 pont*):
40 rózsát el lehet-e osztani 5 lány között úgy, hogy mindegyik lánynak páratlan számú rózsa jusson?

Megoldás:
Nem lehet.(*1 pont*) Öt darab páratlan szám összege páratlan, a 40 páros (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
Hogyan tudnátok egy 40 méteres kötél segítségével pontosan 25 métert kimérni?

Megoldás:
Először összefogom a két végét, ezáltal lemérek 20 métert. (*2 pont*)
Ezután az egyik 20 méteres részt még kétszer egymásután, a két végénél összefogom (*2 pont*), és így 20:4=5 méter lesz még kimérve (*1 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelyben a számjegyek összege 20?

Megoldás:
A 299. (*2 pont*). Minél kevesebb számjegyű egy szám, annál kisebb az értéke. Legkevesebb számjegy segítségével akkor lesz az összeg 20, ha a lehető legtöbb 9-es szerepel benne. Kettőnél több kettes nem lehet, mert $9 + 9 + 9 = 27 > 20$, így pontosan két 9-esnek kell benne lennie: $9 + 9 + 2 = 20$. A kisebb számjegynek kell nagyobb helyiértéken állnia (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2009. NOVEMBER 21.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

4. osztály

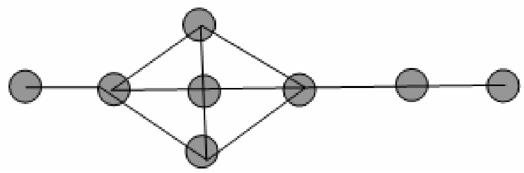
1. feladat (*2 pont*):
Hogyan tudnátok egy 7 perces és egy 5 perces homokórával 13 percet kimérni?

Megoldás:
Egyszerre indítjuk mindkét homokórát. Lemegy az 5 perces, megfordítom. Lemegy a 7 perces, megfordítom. Lemegy másodszor az 5 perces. Ekkor már 10 perc telt el (*1 pont*), és a 7 percesből most lement 3 perc. A 7 percest megfordítom, mire lepereg a homok, eltelt a 13 perc (*1 pont*).

Más helyes megoldásra is jár a 2 pont.

2. feladat (*5 pont*):
Tervezzetek vasútvonalat, amelynek 8 állomása közül kettőről csak 1 irányba, egyről 2 irányba, kettőről 3 irányba, háromról 4 irányba lehet utazni egyenes pályaszakaszokkal, és bármelyik állomásról bármelyik másikra el lehet jutni!

Megoldás:
Lásd az ábrát:



Rendre járnak az adott részleteket teljesítő ábrákért a jelölt pontok: ha 8 állomása van, közülük pontosan kettőről csak 1 irányba (*1 pont*), pontosan egyről 2 irányba (*1 pont*), kettőről 3 irányba (*1 pont*), háromról 4 irányba (*1 pont*) lehet utazni egyenes pályaszakaszokkal és bármelyik állomásról bármelyik másikra el lehet jutni (*1 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
Egy betegnek fél óránként kell bevennie egy-egy szem orvosságot, összesen 12-t. Mennyi idő telik el az első és az utolsó szem bevétele között?

Megoldás:
12 orvosság beszedése 11 „szedésközzel" történik (*2 pont*). 11 fél óra = 5 és fél óra (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2009. NOVEMBER 21.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

5. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Egy szobában 7 szék van egy sorban egymás mellett. A székek kezdetben üresek. Időnként valaki bejön a szobába, leül egy üres székre, és ugyanekkor egyik szomszédja (ha van) fölállt és kimegy. Legfeljebb hány szék lehet foglalt egyszerre a szobában?

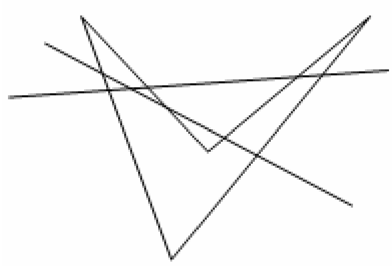
Megoldás:
Legfeljebb 6 (*1 pont*). Elölről töltik fel úgy, hogy a második nem az első szomszédjába, hanem egy székkel odébb ül, majd a 3. közéjük az üres székre ül, és feláll a 3. széken ülő. Az ezután bejövő a 4. székre ül (senkinek nem kell felállnia). A következő bejövő a 3. székre ül és kimegy a 4. széken ülő. Az új bejövő az 5. székre ül, stb. (*1 pont*)

2. feladat (*5 pont*):
Hány darab golyónk van az egyes színekből, ha zöldből és pirosból 28, zöldből és fehérből 44, pirosból és fehérből pedig 54 darab van?

Megoldás:
A 28, 44 és 54 összege, ami 126, mindegyik színű golyó kétszeri jelenlétéből áll elő. Így a háromféle színű golyók száma 126 : 2 = 63 (*1 pont*). Innen rendre megkapjuk a zöldek számát: 63 – 54 = 9 (*1 pont*), a pirosak számát: 63 – 44 = 19 (*1 pont*) és a fehérek számát: 63 – 28 = 35 (*1 pont*). Ellenőrizve a 9, 19, 35 megfelel a feltételeknek (*1 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
Vághat-e két egyenes egy négyszöget 6 részre?

Megoldás:
Igen (*1 pont*), lásd az ábrát (*2 pont*).



BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2009. NOVEMBER 21.)

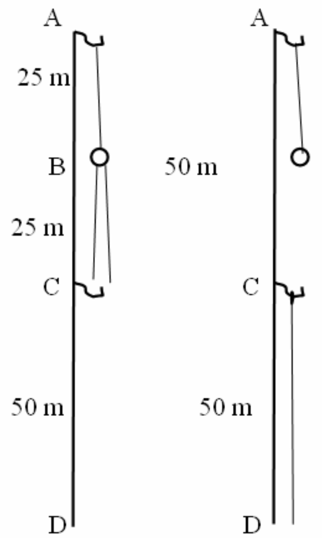
FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

6. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Öt egymást követő természetes szám közül három páros szám. A páros és páratlan számok összegének a különbsége 36. Melyik ez az öt szám?

Megoldás:
A 34, 35, 36, 37, 38 (*1 pont*). Helyes indoklás (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
Egy hegymászó egy 100 m magas sziklafalon szeretne lemászni. Egy 50 és egy 25 méteres kötele van és elegendő mennyiségű fémkarikája. A sziklafal tetején és az 50 m-es magasságban egy-egy kampó van beütve, amiket használhat (más kampó nincs). Hogyan juthat le ugrás, zuhanás nélkül ezen a sziklafalon?



Megoldás:
A felső kampóba beköti a 25 méteres kötelet (*1 pont*) és annak a végére egy olyan hurkot csinál, amelyen átveti az 50 méteres kötelet úgy, hogy annak mindkét vége lefelé lógjon (*1 pont*). Tehát innen duplán van a kötél, így ez újabb 25 méter. Ezzel eléri az 50 méter magasan lévő kampót (*1 pont*), ahova beköti az ötven méteres kötél egyik végét (*1 pont*). Itt megkapaszkodva, kihúzhatja az 50 méteres kötelet (az átcsúszik a 25 méteres kötél végén lévő hurkon) és lelógatva lejut rajta a sziklafal aljáig (*1 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
Ha 3 tyúk 3 nap alatt 3 tojást tojik, akkor 6 tyúk 6 nap alatt hány tojást tojik?

Megoldás:
Ekkor 1 tyúk 3 nap alatt 1 tojást tojik (*1 pont*). Így 6 tyúk 3 nap alatt 6 tojást (*1 pont*), ezért 6 tyúk 6 nap alatt 12 tojást tojik (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2009. NOVEMBER 21.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

7. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Az ABC háromszög AB, BC és AC oldalainak felezőpontjai rendre M, N és P. Mutassátok meg, hogy:
$$AN + BP + CM < AB + BC + AC$$

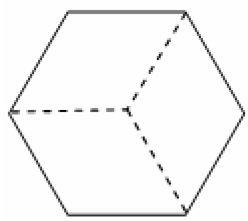
Megoldás:
Minden súlyvonal hossza kisebb a vele egy csúcsból induló két oldal átlagánál. Ezt igazolhatjuk a háromszög paralelogrammává való kiegészítésével. (tükrözzük a háromszöget az oldal felezőpontjára) (*1 pont*). Így:
$$AN + BP + CM < \frac{AB + AC}{2} + \frac{BC + BA}{2} + \frac{CA + CB}{2} = AB + BC + AC. \ (\textit{1 pont})$$

2. feladat (*5 pont*):
Egy apától megkérdezték, hogy hány fia van. Így válaszolt: „3 fiam van. Ha az életkorukat összeszorzom, 36-ot kapok, ha az életkorukat összeadom, 13-at kapok. Amikor a kicsi született, a két nagyobbat leküldtük a nagyszülőkhöz.” Hány évesek a gyerekek?

Megoldás:
36 = $1 \cdot 1 \cdot 36$, 1+1+36= 38, nem 13.
36 = $1 \cdot 2 \cdot 18$, 1+2+18= 21, nem 13.
36 = $1 \cdot 3 \cdot 12$, 1+3+12=16, nem 13.
36 = $1 \cdot 4 \cdot 9$, 1+4+9= 14, nem 13.
36 = $1 \cdot 6 \cdot 6$**, 1+6+6 = 13.**
36 = $2 \cdot 2 \cdot 9$**, 2+2+9= 13.**
36 = $2 \cdot 3 \cdot 6$, 2+3+6= 11, nem 13.
36 = $3 \cdot 3 \cdot 4$, 3+3+4= 10, nem 13.
(*Minden tényezőre bontás 0,5 – 0,5 pont*)
A 2, 2, 9-nél nincs, az 1, 6, 6-nál van két legnagyobb.
Így az életkoruk 1, 6, 6 év. (*1 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
Osszátok fel a szabályos hatszöget 3 egyenes szakasszal 3 egybevágó négyszögre!

Megoldás:
Lásd az ábrát (*3 pont*).



BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2009. NOVEMBER 21.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

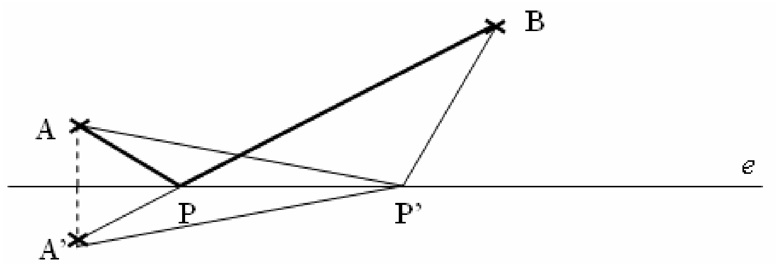
8. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Lehet-e négyzetszám az A = $\overline{abab}$ tízes számrendszerben felírt négyjegyű szám?

Megoldás:
A = $1010 \cdot a + 101b = 101 \cdot (10a+b) = 101 \cdot \overline{ab}$ (*1 pont*). Mivel a 101 prímszám, a tényezők között még páratlanszor van szükség rá, ám a másik tényező kétjegyű, kevesebb 101-nél, ezért nem lehet (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
Az *e* egyenes által meghatározott egyik félsíkban adott két pont: *A* és *B*. Határozzátok meg az *e* egyenesnek azt a *P* pontját, amelyre a *PA* + *PB* összeg legkisebb!

Megoldás:



Legyen A' az A-nak *e*-re vonatkozó tükörképe (*1 pont*). Ekkor az *e* egyenes bármely P' pontja esetén P'A = P'A' (*1 pont*), így *P'A + P'B = P'A' + P'B*. (*1 pont*)
A' és B között a legrövidebb vonal az egyenes, ezért PA'-nek az *e* egyenessel való metszéspontja P (*1 pont*).
PA + PB = PA' + PB< P'A' + P'B = P'A + P'B (*1 pont*)

3. feladat (*3 pont*):
Egy kör alakú asztalnál 77-en ülnek, s mindenki gondol egy egész számra, majd mindenki felírja egy cédulára két szomszédja számának összegét. Miért nem állhat minden cédulán 2009?

Megoldás:
Ha minden cédulán 2009 állna, akkor ez a 77 cédulán álló 77 szám összege $77 \cdot 2009$ volna, ami páratlan szám (*1 pont*). De ebben a 77 számnak az összegében mindegyik gondolt szám kétszer fordulna elő, ami viszont páros szám (*1 pont*). Ellentmondás, ezért nem állhat minden cédulán 2009 (*1 pont*).