BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2016. NOVEMBER 19.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

3. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Apa és fia együtt fűrészelnek. Minden fahasábot 5 részre darabolnak. Megszakítás nélkül mennyi ideig dolgoznak, ha 10 hasábot vágnak fel, és egy vágás kettejüknek együtt 3 percig tart? (Egy vágással csak egy darabot lehet kettévágni.)

Megoldás:
Egy fahasábot 4 vágással, tehát $4 \cdot 3 = 12$ perc alatt darabolnak fel (*1 pont*). Így összesen $12 \cdot 10 = 120$ percig (2 órán át) dolgoznak (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
Egy családban 5 fiútestvér van: Karcsi, Ottó, Misi, Gábor és Bálint. Misi nem a legmagasabb, de magasabb Gábornál, Ottónál és Karcsinál. Ottó alacsonyabb Karcsinál. Gábor csak úgy éri el a villanykapcsolót, ha a nála magasabb Ottó felemeli. Mi a magassági sorrend a fiúk között?

Megoldás:
Jelöljük a fiúkat nevük kezdőbetűivel, és rendezzük őket magasságuk szerint balról jobbra növekvő sorrendbe. Mivel Misi nem a legmagasabb, ezért van legalább egyvalaki, aki nála magasabb. Jelöljünk egy ilyen magasabb fiút ▲-gel:

M ▲ (*1 pont*)

Misi magasabb Gábornál, Ottónál és Karcsinál, de ebből még semmit nem tudunk Gábor, Ottó és Karcsi egymás közti sorrendjéről:

G
O M ▲ (*1 pont*)
K

A következő információ, hogy Ottó alacsonyabb Karcsinál:

O K M ▲ (*1 pont*)

Mivel Gábor csak úgy éri el a villanykapcsolót, ha a nála magasabb Ottó felemeli, így Ottó magasabb Gábornál:

G O K M ▲ (*1 pont*)

Az öt testvér közül Bálintot kell már csak elhelyeznünk a sorban. Tudjuk, hogy valaki magasabb Misinél, így Bálintot a ▲ helyére kell tennünk, vagyis a fiúk magasság szerinti növekvő sorrendje:

Gábor Ottó Karcsi Misi Bálint (*1 pont*)

3. feladat (*3 pont*):
Hányszorosa az első négy páratlan szám összege az első két páratlan szám összegének?

Megoldás:
$1+3+5+7=16$ (*1 pont*), $1+3=4$ (*1 pont*), $16:4=4$ (*1 pont*).
Ha csak a helyes választ, 4-et mondja a csapat, akkor is megkapják a 3 pontot.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2016. NOVEMBER 19.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

4. osztály

1. feladat (*2 pont*):
A 26, 39, 48, 99, 78, 66 számok közül melyik nem illik a többi közé, és miért?

Megoldás:
Több lehetséges jó válasz is van, például:
- A 78, mert a többinek a második számjegye osztható az elsővel.
- A 78, mert ebben egy páros és egy páratlan számjegy áll, a többiben vagy mindkét számjegy páros, vagy mindkettő páratlan.
- A 26, mert egyedül ez nem többszöröse a 3-nak.

Bármilyen más helyesen megindokolt választ is elfogadunk.
Jó szám, hozzá tartozó jó indoklással: *2 pont* (*elegendő egy megoldást adni*).

2. feladat (*5 pont*):
Van 5 különböző kulcsunk és 5 hozzájuk tartozó zár. A legrosszabb esetben hány próbálkozásra van szükségünk, amíg minden zárhoz megtaláljuk a hozzátartozó kulcsot?

Megoldás:
Az első zárhoz legrosszabb esetben 4 kulcsot kell kipróbálni (ha ugyanis a 4 kipróbált kulcs közül egyik sem tartozik hozzá, akkor tudjuk, hogy a ki nem próbált ötödik kulcs a megfelelő) (*2 pont*). A második zárhoz legrosszabb esetben a maradék 4 kulcsból 3-at kell kipróbálni (*1 pont*), a harmadikhoz 2-t, a negyedik zárhoz már csak 1-et (*1 pont*). Így legrosszabb esetben összesen $4+3+2+1=10$ próbálkozás szükséges (*1 pont*).
Amennyiben az első zárhoz 5 próbálkozást, a másodikhoz 4-et stb. vesz figyelembe a csapat, az 1 pontot ér, és ha ebből válaszként $5+4+3+2+1=15$-öt adnak, erre még 1 pont adható. Ha ez utóbbi magyarázatot adják, de megjegyzik, hogy az utolsót már nem kell kipróbálni, azaz a válaszuk 14, akkor összesen 3 pontot kapjanak.

3. feladat (*3 pont*):
Miért igaz, hogy három egész szám közül mindig kiválasztható kettő, amelyek összege osztható 2-vel?

Megoldás:
A három szám közül a párosak száma lehet 0, 1, 2 vagy 3 (*1 pont*). Ha nincs páros köztük, vagy csak 1 páros, akkor van két páratlan közöttük, amelyek összege osztható 2-vel (*1 pont*). Ha a párosak száma 2 vagy 3, akkor két páros szám összege osztható 2-vel (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2016. NOVEMBER 19.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

5. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Adjatok meg két olyan természetes számot, amelyek szorzata megegyezik a náluk eggyel nagyobb számok összegével!

Megoldás:
Módszeres próbálkozással megfigyelhető, hogy ha nagy számokat keresünk, a szorzat jóval nagyobb az eggyel nagyobb számok összegénél, így a kisebb számok között keresgélünk (*1 pont*). A 2 és 4 két megfelelő szám, mivel $2 \cdot 4 = 8$ és $3 + 5 = 8$, tehát ezekre valóban teljesül a kívánt feltétel (*1 pont*).
Ha egy csapat csak a két számot adja meg az ellenőrzéssel együtt, akkor is megkapja a 2 pontot.

2. feladat (*5 pont*):
Egy apának 16 kecskéje volt. Az első naponta 1 liter tejet, a második naponta 2 liter tejet, a harmadik naponta 3 liter tejet, és így tovább, a tizenhatodik naponta 16 liter tejet adott. Az apa úgy akarta szétosztani négy fia között a kecskéket, hogy mindegyik fia ugyanannyi kecskét kapjon, és azok naponta egyforma mennyiségű tejet adjanak. Szét lehet-e így osztani a kecskéket? Ha igen, hogyan? Ha nem, miért nem?

Megoldás:
Igen, szét lehet így osztani a kecskéket (*1 pont*). Mindegyik fiú négy kecskét kap. A 16 kecske összesen $1 + 2 + 3 + ... + 16 = 136$ liter tejet ad naponta. Ezért olyan négyes csoportokat kell kialakítani, amelyek napi tejhozama összesen $136 : 4 = 34$ liter (*1 pont*). Egy lehetséges megvalósítás a következő:

I. $1 + 8 + 9 + 16$;
II. $2 + 7 + 10 + 15$;
III. $3 + 6 + 11 + 14$;
IV. $4 + 5 + 12 + 13$. (*3 pont*)

3. feladat (*3 pont*):
Pistinek 680 Ft-tal több pénze van, mint húgának, Julinak. Ha Pisti Julinak ad 460 Ft-ot, akkor melyiküknek lesz több pénze és mennyivel?

Megoldás:
Julinak (*1 pont*), 240 Ft-tal (*2 pont*).
Ha a válasz az, hogy Julinak 120 Ft-tal, akkor 1+2 helyett 1+1 pont adható.
Ha a válasz az, hogy Pistinek 240 Ft-tal, akkor összesen 1 pont adható.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2016. NOVEMBER 19.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

6. osztály

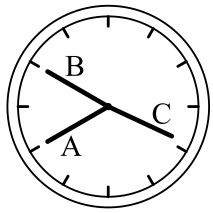
1. feladat (*2 pont*):
Adjatok meg két olyan egész számot, amelyek szorzata megegyezik a náluk eggyel kisebb számok szorzatával!

Megoldás:
Két lehetséges megfelelő szám például:

- a -1 és a 2, hiszen $(-1)\cdot 2=-2=(-2)\cdot 1$.
- a 0 és az 1, hiszen $0\cdot 1=0=(-1)\cdot 0$.

Bármely helyes válaszra *1 pont*, az ellenőrzésre *1 pont* adható (*elegendő egy jó megoldást megadni*).
Megjegyzés: Az x és $-x+1$ *számok mindig jó megoldást adnak, ahol x tetszőleges szám.*

2. feladat (*5 pont*):
A múzeumban Dénes egy különleges órát látott. Az óra lapján egyáltalán nem voltak számok. Nem volt egyértelmű, hol van az óra felső és alsó része, továbbá a mutatók (óra-, perc- és másodpercmutató) mind egyenlő hosszúságúak voltak (lásd az ábrát). Mennyi lehet a pontos idő ezen az órán? (A mutatókat az A, B, C betűkkel jelöltük.)



Megoldás:
A pontos idő ezen az órán: 10 perc múlva 6 óra, azaz 5 óra 50 perc vagy 17 óra 50 perc (*1 pont*). (*Elegendő a háromféle leírás egyikét megadni.*)
Először derítsük ki, melyik az óramutató. Ha az óramutató pontosan valamelyik beosztásra mutatna, akkor mind a két másik mutató a 12-es jelzésen állna. Mivel az ábrán nincsenek egybeeső mutatók, ezért az óramutató nem mutathat pontosan valamelyik beosztásra, így C az óramutató (*1 pont*). A másik két mutató pontosan beosztáson áll, ez azt jelenti, hogy egész számú percet mutat az óra, és így a másodpercmutató a 12-esen áll (*1 pont*). Ha A volna a másodpercmutató, akkor az óra (az óramutató alapján) 8 óránál kicsit kevesebbet mutatna, viszont ekkor a harmadik mutató 10 perccel többet mutatna egy egész óránál, így ezek ellentmondanak egymásnak (*1 pont*). Ezért csak B lehet a másodpercmutató, és A a percmutató (*1 pont*). Így ez az óra 10 perc múlva 6 órát (vagy másképp 5 óra 50 percet, illetve 17 óra 50 percet mutat).

3. feladat (*3 pont*):
Hét turista állított be egyszer egy kis vendégházba. Éjjeli szállást kértek, mindegyikük külön szobába. A szálloda vezetője közölte velük, hogy csak hat üres szobája van, reméli azonban, hogy ennek ellenére is el tudja helyezni mind a hét vendéget úgy, ahogy kívánják.
Az első turistát bevezette az első szobába, és megkért egyet a többiek közül, hogy maradjon ő is ott egy darabig. Azután a harmadik turistát bevezette a második szobába, a negyediket a harmadikba, az ötödiket a negyedikbe, a hatodikat az ötödikbe. Ekkor visszament az első szobába a hetedik turistáért, és őt elszállásolta a hatodik szobában. Így mindenkinek jutott külön szoba.
Vagyis hét turistát sikerült elhelyeznie hat szobában úgy, hogy mindegyiküknek külön szoba jutott. Ez mégiscsak furcsa! Hol a hiba?

Megoldás:
A feladat szövegében a másodiknak és hetediknek számolt turista valójában ugyanaz a személy (*2 pont*), így ténylegesen csak hat turistát szállásolt el a szálloda vezetője (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2016. NOVEMBER 19.)

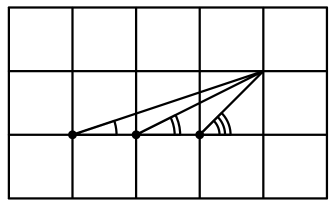
FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

7. osztály

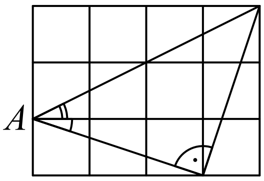
1. feladat (*2 pont*):
Valaki írjon le egy kétjegyű számot, cserélje fel a számjegyeit, és az így kapott kétjegyű számot is írja le. A nagyobból vonja ki a kisebbet. Mondja meg a különbség utolsó jegyét, én pedig megmondom a tízesek helyén álló számjegyet. Hogyan tudom ezt kitalálni?

Megoldás:
A mondott számot mindig 9-re kell kiegészíteni (*1 pont*).
Mivel $\overline{ab}-\overline{ba}=10a+b-10b-a=9a-9b=9(a-b)$, ezért a két szám különbsége mindig többszöröse 9-nek. Két tetszőleges kétjegyű szám különbsége legfeljebb $99-10=89$ lehet, viszont a 9 ilyen többszöröseiben a számjegyek összege mindig 9 (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
Bizonyítsátok be, hogy a mellékelt négyzetrácsos ábrán bejelölt három szög közül a legnagyobb szög nagysága megegyezik a két kisebb szög összegével!



Megoldás:
A legnagyobb szög egy egyenlő szárú derékszögű háromszög hegyesszöge, tehát 45°-os (*1 pont*).



Mivel a bal oldali ábrán egy egyenlő szárú derékszögű háromszögünk van (*1 pont*), amelynek *A*-nál lévő hegyesszöge éppen a jelölt két kisebb szög összege (*2 pont*), ezért a jelölt két kisebb szög összege 45°, amit bizonyítani kellett (*1 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
Egy diáktalálkozón 17 tanuló vett részt. A találkozót követő napokban elkezdtek egymással levelezni, mindegyikük pontosan 2 vagy 4 levelet adott fel. Lehetséges-e, hogy mindegyikük pontosan 3 levelet kapott?

Megoldás:
Nem lehetséges (*1 pont*). Minden levelet pontosan egyvalaki ad fel, és egyvalaki kap meg, ezért az elküldött levelek száma megegyezik a megkapott levelek számával. Mindenki páros számú levelet adott fel, így összesen páros sok levelet adtak fel, tehát páros sok levelet is kaptak meg (*1 pont*). Ha mindenki 3 levelet kapott volna meg, akkor összesen $17\cdot 3$ levelet kaptak volna, ami páratlan (*1 pont*). Tehát nem kaphatott mindegyikük pontosan 3 levelet.

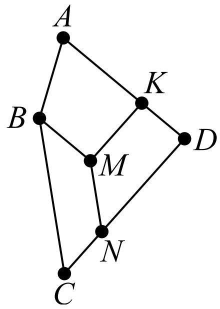
BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2016. NOVEMBER 19.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

8. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Mutassátok meg, hogyan lehet bármilyen négyszöget, amely nem paralelogramma, három trapézra darabolni!

Megoldás:
Jelölje a négyszög csúcsainál lévő szögeket a szokásos módon α, β, γ és δ. Tegyük fel, hogy β a négyszög (egyik) legnagyobb szöge (ekkor $\beta > 90°$). Ekkor α vagy γ valamelyikét β-hoz adva 180°-nál többet kapunk (ha ugyanis $\alpha + \beta \leq 180°$ és $\beta + \gamma \leq 180°$ lenne, abból $\alpha + 2\beta + \gamma \leq 360°$ következne, de ekkor $360° = \alpha + \beta + \gamma + \delta \leq \alpha + 2\beta + \gamma \leq 360°$ miatt mindenütt egyenlőség állna, azaz $\alpha + \beta = 180°$ és $\beta + \gamma = 180°$ miatt a négyszög paralelogramma lenne).



Ha például $\alpha + \beta > 180°$, akkor a *B* csúcsból az *AD* oldallal indított párhuzamosnak lesz a négyszög belsejébe eső szakasza. (*1 pont*)
Vegyünk fel ekkor egy *BM* vágást a *B* csúcsból indítva az *AD* oldallal párhuzamosan úgy, hogy az *M* pont a négyszög belsejébe kerüljön. Az *M* pontból vágjunk tovább az *MN* és *MK* vonalak mentén a *BC* és *CD* oldalakkal párhuzamosan, ahol *N* és *K* a négyszög *CD* és *AD* oldalára kerül. Így jó darabolást kapunk. (*1 pont*)

2. feladat (*5 pont*):
Adjatok meg két olyan egész számot, amelyek szorzata megegyezik a náluk eggyel nagyobb számok összegével! Keressétek meg az összes megoldást!

Megoldás:
Ha a két egész szám *a* és *b*, akkor $ab = a + b + 2$ teljesül (*1 pont*). Innen $(a-1)(b-1) = 3$ (*1 pont*), ahonnan (a két szám sorrendjétől eltekintve) $a - 1 = 1$ és $b - 1 = 3$ vagy $a - 1 = -1$ és $b - 1 = -3$ (*1 pont*). Tehát két megoldás van: a 2 és a 4 (*1 pont*), illetve a –2 és a 0 (*1 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
Egy 200 m hosszú tehervonat óránként 60 km-t tesz meg. Hány perc telik el addig, amíg egy 300 m hosszú alagúton áthalad?

Megoldás:
A vonatnak az áthaladása során 500 m-t kell megtennie (*1 pont*). Ha a sebessége óránként 60 km, akkor percenként 1 km-t (*1 pont*), azaz 1000 m-t tesz meg, így az 500 m-t fél perc (*1 pont*) alatt teszi meg.