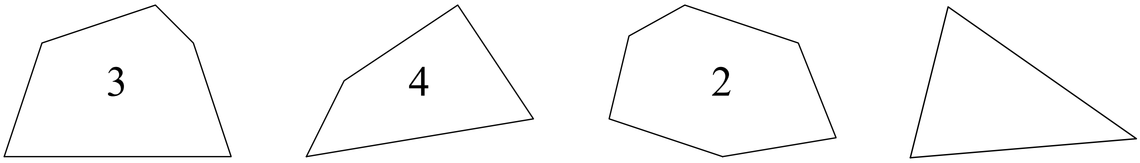
BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2018. NOVEMBER 24.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

3. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Milyen számot írnátok az üres háromszögbe? Miért?



Megoldás:
5-öt (*1 pont*). Az alakzat oldalainak száma és a beírt szám összege mindig 8 (*1 pont*).
Más válasz, amelyre logikus magyarázatot tudnak adni, szintén elfogadható.

2. feladat (*5 pont*):
Számpiramist kezdtünk építeni valamilyen szabály szerint (lásd az ábrán). Keressétek meg, mi lehet a szabály, és írjátok a betűk helyére a megfelelő számokat! Mennyi lehet a értéke? Adjatok többféle szabályt! (Két eltérő megoldásra jár pont.)

$$\begin{array}{ccccccc} & & & a & & & \\ & & b & & c & & \\ & 5 & & 8 & & 11 & \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 \end{array}$$

Megoldás:
1. szabály: Minden szám (az alsó sor kivételével) a balra közvetlenül alatta lévő szám és a jobbra közvetlenül alatta lévő szám kétszeresének az összege: $5=1+2\cdot2$, $8=2+2\cdot3$, $11=3+2\cdot4$.
Így $b=5+2\cdot8=21$, $c=8+2\cdot11=30$ és $a=21+2\cdot30=81$.
2. szabály: Minden számot (az alsó sor kivételével) úgy kapunk, hogy a balra közvetlenül alatta lévő szám és a jobbra közvetlenül alatta lévő szám összegéhez először 2-t, majd 2-nél mindig eggyel nagyobb számot adunk: $5=1+2+2$, $8=2+3+3$, $11=3+4+4$.
Így $b=5+8+5=18$, $c=8+11+6=25$ és $a=18+25+7=50$.
Az elsőként felismert helyes összefüggés *1 pont*ot és a meghatározott a értéke újabb *1 pont*ot ér.
A másodikként felismert helyes összefüggés *2 pont*ot és a meghatározott a értéke *1 pont*ot ér.
A fentiektől eltérő helyes összefüggést is elfogadunk.

3. feladat (*3 pont*):
Egy futóversenyen hányadik helyre kerülsz, miután
a) megelőzted az addig másodikat?
b) megelőzted az addig utolsót?

Megoldás:
a) Második (*1 pont*).
b) Ez nem fordulhat elő (*1 pont*), mert az utolsó előzéséhez mögüle kellene érkezni, de akkor ő nem lehetne utolsó (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2018. NOVEMBER 24.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

4. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Egy pici serpenyőbe egyszerre csak 2 fasírt fér bele. Egy fasírt egy oldala 5 perc alatt sül meg. Hány perc a legkevesebb, ami alatt megsüthető 3 fasírt ebben a serpenyőben?

Megoldás:
15 perc (*1 pont*). Először 2 fasírt egy-egy oldala 5 perc alatt sül meg. Ezután kivesszük az egyik fasírtot, a másikat megfordítjuk, és betesszük a nyers fasírtot. Ez újabb 5 perc. Ezután kivesszük a teljesen megsült fasírtot, megfordítjuk a másikat és melléje tesszük az előbb kivett fasírtot, ez ismét 5 perc, vagyis összesen 15 perc alatt sült meg 3 fasírt (*1 pont*).
Ennél kevesebb idő nem elég, hiszen minden fasírtnak 10-10 percig kell sülnie, ez együttesen 30 perc, ám egyszerre csak 2 fasírt fér a serpenyőbe, ezért teljes kihasználtság mellett is legalább $30:2=15$ perc szükséges.

2. feladat (*5 pont*):
Egy állatkereskedésben kis- és nagymadarak kaphatók. A nagymadarak ára kétszerese a kismadarak árának. Csenge 5 nagymadarat és 3 kismadarat vásárolt. Ha 3 nagymadarat és 5 kismadarat vásárolt volna, akkor 2 000 Ft-tal kevesebbet fizetett volna. Mennyi az ára egy kis-, illetve egy nagymadárnak?

Megoldás:
A kismadár 1 000 Ft-ba, a nagymadár 2000 Ft-ba kerül (*1 pont*).
Egy lehetséges magyarázat: Egy nagymadár árban becserélhető 2 kismadárra (*1 pont*). Így Csenge az 5 nagymadarat 10 kismadárra cserélhetné, és ekkor 13 kismadarat vásárolt volna (*1 pont*), ám a 3 nagymadár és az 5 kismadár ugyanannyit érne, mint $6+5=11$ kismadár (*1 pont*). Ezért 2 kismadár ára jelenti a 2 000 Ft különbséget (*1 pont*), amiből következik, hogy 1 kismadár ára 1 000 Ft, egy nagymadáré pedig 2 000 Ft.

3. feladat (*3 pont*):
„Az én kertem nagyobb területű, mint a szomszédomé, mégis kevesebb kerítés kellett a bekerítéséhez!" – büszkélkedik János bácsi. Lehetséges-e, hogy igaza van?

Megoldás:
Igen (*1 pont*). Például előfordulhat, hogy egy négyzet alakú kerthez kevesebb kerítés kell, mint egy ennél kisebb területű, nagyon keskeny és nagyon hosszú kerthez (*1 pont*). Erre konkrét példa, ha János bácsi kertje egy 4×4 m-es négyzet (amelynek területe 16 m^2, kerülete 16 m), a szomszédjáé pedig egy 2×7 m-es téglalap (amelynek területe 14 m^2, kerülete 18 m). (*1 pont*).

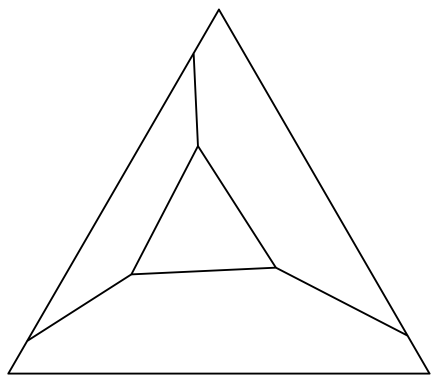
BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2018. NOVEMBER 24.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

5. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Daraboljatok fel egy háromszöget négy részre úgy, hogy a részek között legyen háromszög, négyszög és ötszög is!

Megoldás:
Egy lehetséges jó rajz (*2 pont*) a következő:



2. feladat (*5 pont*):
Biri és Piri fáramászásban versenyeztek: egyszerre indultak, és ugyanabba a magasságba kellett felmászniuk, majd onnan lemászniuk, két azonos méretű és alakú fán. Biri ugyanazzal a sebességgel haladt felfelé és lefelé is, Piri viszont kétszer gyorsabb volt felfelé Birinél, de lefelé csak feleakkora sebességgel haladt, mint Biri. Ki lett a győztes?

Megoldás:
Biri lett a győztes (*1 pont)*. Felfelé Biri még csak középen járt, amikor Piri a tetején (*1 pont)*, viszont Piri csak a fa közepéig ereszkedett, amikor utolérte őt Biri (*2 pont)*. Lefelé Biri gyorsabb, így a közepétől Biri hamarabb ért le (*1 pont)*.

3. feladat (*3 pont*):
Jóska egy 3×3-as bűvös négyzetet akart készíteni (amelynek minden sorában, minden oszlopában és a két átlójában is ugyanannyi a számok összege). „Nem sikerült – panaszkodik –, mert az első sorban álló számok összege nagyobb az első oszlopban állókénál. A második sor a második oszlopénál, a harmadik sor meg a harmadik oszlopénál nagyobb összeget ad.” Higgyünk neki? Miért?

Megoldás:
Ne higgyünk neki (*1 pont*). Amit ő állít, az alapján a sorokban lévő számok összege nagyobb az oszlopokban lévő számok összegénél. Ez nem lehetséges, hiszen a három sor összege megegyezik a három oszlop összegével (mivel mindkettőben ugyanaz a 9 szám szerepel) (*2 pont*).

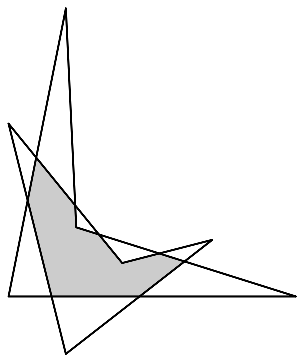
BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2018. NOVEMBER 24.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

6. osztály

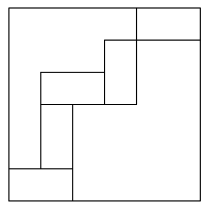
1. feladat (*2 pont*):
Rajzoljatok le két négyszöglapot úgy, hogy az általuk fedett közös rész egy tízszöglap legyen!

Megoldás:
Egy jó rajz (*2 pont*) a következő:



Ha konkáv négyszöggel próbálkoznak, de nem sikerül megfelelőt rajzolniuk, akkor kaphatnak 1 pontot.

2. feladat (*5 pont*):
Az ábrán látható nagy négyzetben 5 olyan egyforma kis téglalapot helyeztünk el, amelyeknek egyenként 6 cm a kerülete, és oldalaik párhuzamosak a négyzet oldalaival. Hány cm^2 a területe egy ilyen kis téglalapnak?



Megoldás:
Megfigyelhetjük, hogy a négyzet függőleges helyzetű oldala megegyezik a téglalap hosszabbik és rövidebbik oldala összegének kétszeresével (*1 pont*), vagyis a kerületével, ami 6 cm (*1 pont*). Ugyanakkor a négyzet vízszintesen álló oldalának hossza azonos a téglalap hosszabbik oldalának háromszorosával (*1 pont*). Így a téglalap hosszabbik oldala 2 cm-es (*1 pont*). Ebből a kerület figyelembevételével következik, hogy a téglalap rövidebbik oldala 1 cm, és így a területe 2 cm^2 (*1 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
Két számot összeszoroztunk. Milyen irányban változhat a szorzat értéke, ha mindkét tényezőjét csökkentjük? Válaszotokat indokoljátok!

Megoldás:
A szorzat:

- csökkenhet, pl.: $2\cdot 4=8 \;>\; 1\cdot 3=3$ (*1 pont*);
- növekedhet, pl.: $(-10)\cdot 5=-50 \;<\; (-11)\cdot(-1)=11$ (*1 pont*);
- változatlan maradhat, pl.: $1\cdot 2=2 \;=\; (-2)\cdot(-1)=2$ (*1 pont*).

Amennyiben nem indokolnak konkrét példával, és mindhárom lehetőséget megmondják, 1 pontot kaphatnak, egyébként 0 pontot.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2018. NOVEMBER 24.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

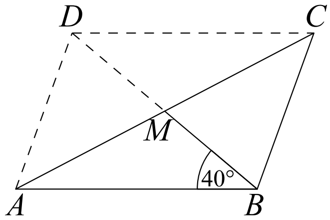
7. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Adjátok meg az összes olyan hatjegyű $\overline{abcdef}$ számot, amely az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza, továbbá $\overline{ab}$ osztható 2-vel, $\overline{abc}$ osztható 3-mal, $\overline{abcd}$ osztható 4-gyel, $\overline{abcde}$ osztható 5-tel és $\overline{abcdef}$ osztható 6-tal! (A megoldást nem szükséges indokolnotok.)

Megoldás:
Két megfelelő szám létezik: a 123654 (*1 pont*) és a 321654 (*1 pont*).
A feltételekből következik, hogy b, d és f páros, továbbá $e = 5$, így a és c az 1 és 3 értékeket veszi fel valamilyen sorrendben, elegendő tehát ezt a két lehetőséget vizsgálnunk.
Mivel $a + b + c$ osztható 3-mal, ezért mindkét esetben csak $b = 2$ lehetséges. Ahhoz, hogy $\overline{cd}$ osztható legyen 4-gyel, mindkét esetben $d = 6$ szükséges, innen $f = 4$ is következik. Vagyis a két esetben az 123654 és a 321654 megoldásokat kapjuk.

2. feladat (*5 pont*):
Az ABC háromszögben M az AC felezőpontja, a BM szakasz hossza fele az AB szakasz hosszának, és $ABM\measuredangle = 40°$. Hány fokos ekkor az ABC szög?

Megoldás:
Tükrözzük a háromszöget az M pontra, és legyen B tükörképe D (*1 pont*).
Ekkor $DB = 2 \cdot BM$, továbbá a feltétel alapján $AB = 2 \cdot BM$, így $AB = DB$, vagyis az ADB háromszög egyenlő szárú (*1 pont*).
Innen kapjuk, hogy $DAB\measuredangle = (180° - 40°) : 2 = 70°$ (*1 pont*).
A tükrözés miatt $ABCD$ paralelogramma (*1 pont*), így szomszédos szögei kiegészítő szögek, és ezért $ABC\measuredangle = 180° - 70° = 110°$ (*1 pont*).



3. feladat (*3 pont*):
Mikor engedünk ki több vizet a tartályból: akkor, ha kiengedjük a 25%-át és utána még a kiengedett mennyiség 50%-át, vagy ha előbb engedjük ki az 50%-át és utána még a kiengedett mennyiség 25%-át?

Megoldás:
Az utóbbi esetben engedünk ki nagyobb mennyiséget (*1 pont*).
Ha ugyanis a tartályban lévő víz kezdeti mennyisége x, akkor az első esetben a bent maradó víz mennyisége $x - 0,25x - 0,5 \cdot 0,25x = x - 0,25x - 0,125x = 0,625x$ (vagyis az eredeti víz 62,5%-a), míg a második esetben $x - 0,5x - 0,25 \cdot 0,5x = x - 0,5x - 0,125x = 0,375x$ (vagyis az eredeti víz 37,5%-a) (*2 pont*).
Az indoklásra a 2 pont akkor is jár, ha nem végeznek pontos számítást, de helyes becslést adnak.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2018. NOVEMBER 24.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

8. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Az $A > B > C > D > E > F > G > H$ egyenlőtlenségben a különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek. Hány megoldása van a számrejtvénynek?

1. megoldás:
Ha 10 betű volna az egyenlőtlenségben, akkor csak egyetlen megoldása volna. Így viszont annyi megoldása van, ahányféleképpen két számjegyet elhagyhatunk a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek közül (*1 pont*). Ez pedig $9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$ lehetőség (*1 pont*).
2. megoldás:
10 számjegyből 2 kihagyásával választjuk ki az összes többit. A megmaradó 8 számjegyet mindig egyetlen helyes módon lehet csökkenő sorrendben felírni (*1 pont*). Ezért a lehetőségek száma $\frac{10\cdot 9}{2}=45$ (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
Jancsinak volt egy aranya, és ezt elültetette a varázsföldbe. Olyan fa nőtt belőle, amelyik vagy két arany, vagy két ezüst, vagy egy arany és egy ezüst érmét termett. Ami arany érme termett, azt Jancsi azonnal újra elültette, és abból újra ilyen fa nőtt. Ami ezüst érme termett, azt mind zsebre tette. Összesen hány arany érmét ültetett el Jancsi addig, amikor már nem volt mit elültetnie, ha addig összesen 2018 ezüst érme termett?

Megoldás:
Jelölje az összes arany érme számát x, az összes ezüst érme számát pedig y. Mivel minden arany érméből egy új fa nőtt, amely két érmét termett, ezért minden arany érmének két érme lett utódja, vagyis az utódok száma $2x$ (*1 pont*). Ugyanakkor az érmék együttes száma $x+y$, és ezek közül csak az első arany érme nem utód, tehát az utódok száma $x+y-1$-gyel is jelölhető (*2 pont*). Vagyis $2x=x+y-1$ teljesül, ahonnan $x=y-1$. Mivel $y=2018$, ezért $x=2017$ arany érmét ültetett el Jancsi (*2 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
Egy háromszög a, b, c oldalai közül a a legnagyobb. Szerkeszthető-e háromszög a $2a$, b, c szakaszokból? Válaszotokat indokoljátok!

Megoldás:
Nem szerkeszthető (*1 pont*). Ha a $2a$, b, c szakaszokból szerkeszthető volna háromszög, akkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt teljesülnie kellene a $2a<b+c$ feltételnek. Viszont $a>b$ és $a>c$, amely két egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadva $2a>b+c$ adódik, tehát az előző feltétel nem teljesülhet (*2 pont*).