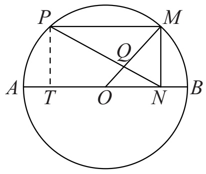
BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY – ORSZÁGOS DÖNTŐ, 2015. MÁRCIUS 14.

MEGOLDÓKULCS és JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

	9. osztály	10. osztály		11. osztály	12. osztály	
1.	**A B C**	**B D**	1.	**C**	**A B C**	1.
2.	**E**	**B C D**	2.	**E**	**C D E**	2.
3.	**C**	**C D E**	3.	**C D**	**C D**	3.
4.	**E**	**B C E**	4.	**A B C D**	**B D**	4.
Max.	*54+16 pont*	*59+16 pont*	*Max.*	*56+16 pont*	*58+16 pont*	*Max.*

9. osztály 5. feladat: Vezessük be a $b+c=x$, $c+a=y$ és $a+b=z$ jelöléseket (**2 pont**). Ekkor $a=\frac{-x+y+z}{2}$, $b=\frac{x-y+z}{2}$ és $c=\frac{x+y-z}{2}$ (**2 pont**), a bizonyítandó egyenlőtlenség pedig $\frac{-x+y+z}{2x}+\frac{x-y+z}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\geq\frac{3}{2}$ alakú lesz (**2 pont**). Ez a következőképpen alakítható tovább: $\frac{-x+y+z}{x}+\frac{x-y+z}{y}+\frac{x+y-z}{z}\geq 3$ (**2 pont**), $-1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1\geq 3$ (**2 pont**), $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\geq 6$ (**2 pont**). Ez utóbbi állítás pedig igaz, hiszen bármely pozitív számnak és reciprokának összege legalább 2 (**2 pont**). Mivel az átalakításaink egyenértékűek voltak, és igaz kijelentéshez jutottunk, így az eredeti állítás is igaz (**2 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)

10. osztály 5. feladat: a) Ha *n* db 2×2-es és $2015-n$ db 1×1-es négyzetet használunk fel, akkor olyan *k* természetes számot kell keresnünk, amelyre $4n+2015-n=k^2$ teljesül (**3 pont**). De ez ekvivalens a $3(n+671)+2=k^2$ feltétellel, ami viszont nem lehetséges, mert egy négyzetszám 3-as maradéka nem lehet 2 (**4 pont**). Tehát a két fajtából felhasznált négyzetek együttes száma nem lehet pontosan 2015 (**1 pont**).
b) Ha *n* db 2×2-es és $2016-n$ db 1×1-es négyzetet használunk fel, akkor olyan *k* természetes számot kell keresnünk, amelyre $4n+2016-n=k^2$ teljesül (**3 pont**). Ez ekvivalens a $3n+2016=k^2$ feltétellel, amely teljesülhet is, például ha $k=45$ és $n=3$ (**3 pont**). Nyilvánvaló, hogy 3 db 2×2-es és 2013 db 1×1-es négyzetből valóban ki lehet rakni egy 45×45-ös négyzetet, például úgy, hogy a bal felső 2×6-os téglalapot 2×2-es négyzetekből, a fennmaradó részt pedig 1×1-esekből rakjuk ki (**2 pont**). A helyesen leírt konstrukció önmagában is 8 pontot ér. (Összesen **max. 16 pont**.)



11. osztály 5. feladat: Legyen a *P* pont *AB*-re eső merőleges vetülete *T*. Ekkor *TNMP* téglalap (**2 pont**), amelynek *TP*-vel párhuzamos szimmetriatengelye egybeesik a kör *TP*-vel párhuzamos szimmetriatengelyével. Ebből következik, hogy $ON=OT$ (**2 pont**). Csakhogy $MP=NT$, és így teljesül a $2\cdot ON=PM$ összefüggés. Ugyanakkor $MP\parallel ON$, ami miatt $QPM\measuredangle=QNO\measuredangle$ és $QMP\measuredangle=QON\measuredangle$. Ezek alapján a *PQM* háromszög és az *NQO* háromszög hasonló (**2 pont**), a hasonlóság aránya 2:1 (**2 pont**). Ebből következik, hogy $2\cdot OQ=QM$, vagyis $OQ=\frac{OM}{3}$, tehát $OQ=\frac{r}{3}$, ahol *r* az eredeti kör sugara (**1 pont**). Így a mértani hely egy az eredetivel koncentrikus kör (**2 pont**) – kivéve az *AB*-vel párhuzamos és a rá merőleges átmérők összesen 4 végpontját (**2 pont**) –, amelynek sugara harmada az eredeti kör sugarának (**1 pont**). A helyes ábrára **2 pont** jár. (Összesen **max. 16 pont**.)

12. osztály 5. feladat: Írjuk *n* helyére rendre az 1, 2, 3 számokat, így a következő egyenlőségekhez jutunk: $f(1)=1$, $f(3)+1=f^2(2)$ és $4f(2)+1=f^2(3)$. (**2 pont**) Innen behelyettesítéssel az $f^4(2)-2f^2(2)-4f(2)=0$ egyenletet kapjuk (**2 pont**), amelynek $f(2)=2$ megoldása (**2 pont**), és más pozitív megoldása nincsen (**1 pont**). Ebből pedig $f(1)=1$, $f(2)=2$ és $f(3)=3$. (**1 pont**) Innen már megsejthetjük, hogy $f(n)=n$. (**1 pont**) Állításunkat teljes indukció segítségével igazoljuk. Tegyük fel, hogy minden $1\leq k\leq n$ esetén $f(k)=k$, majd lássuk be, hogy ekkor $f(n+1)=n+1$ is teljesül. (**1 pont**) Mivel $\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}+\frac{1}{f(2)\cdot f(3)}+...+\frac{1}{f(n-1)\cdot f(n)}=\frac{f(n-1)}{f(n)}$, ezért

$$\left(\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}+\frac{1}{f(2)\cdot f(3)}+...+\frac{1}{f(n-1)\cdot f(n)}\right)+\frac{1}{f(n)\cdot f(n+1)}=\frac{f(n-1)}{f(n)}+\frac{1}{f(n)\cdot f(n+1)}=\frac{f(n)}{f(n+1)}.$$ (**2 pont**)

Ez utóbbi sor az indukciós feltevés alapján: $\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n\cdot f(n+1)}=\frac{n}{f(n+1)}$. Mindkét oldalt $n\cdot f(n+1)$-gyel szorozva $(n-1)\cdot f(n+1)+1=n^2$, ahonnan $f(n+1)=\frac{n^2-1}{n-1}=n+1$. (**2 pont**) Ezzel a sejtést beláttuk, vagyis a keresett függvény $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}^+$, $f(n)=n$. (**2 pont**) (Összesen **max. 16 pont**.)