BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
KÖRZETI FORDULÓ, 2015. JANUÁR 23.

MEGOLDÓKULCS

	9. osztály	10. osztály		11. osztály	12. osztály	
1.	**C D**	**B E**	1.	**B C D E**	**A B C E**	1.
2.	**C E**	**A**	2.	**E**	**C**	2.
3.	**A B C D**	**B D E**	3.	**E**	**A B E**	3.
4.	**A B D**	**B C E**	4.	**C**	**C**	4.
5.	**C**	**B D**	5.	**C**	**B**	5.
6.	**D**	**D E**	6.	**B D E**	**D**	6.
7.	**C**	**C**	7.	**C**	**A C**	7.
8.	**C D**	**B D E**	8.	**A B D E**	**C E**	8.
9.	**D**	**C D E**	9.	**-**	**C D**	9.
10.	**E**	**B C**	10.	**C D**	**A**	10.
11.	**A B C**	**A B D**	11.	**A B C**	**A B C**	11.
12.	**A B C D**	**B C D E**	12.	**D**	**D**	12.
13.	**C D**	**A B C**	13.	**D**	**B**	13.
Max.	*183+16 pont*	*188+16 pont*	*Max.*	*179+16 pont*	*179+16 pont*	*Max.*

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
KÖRZETI FORDULÓ, 2015. JANUÁR 23.

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ A 14. FELADATOKHOZ

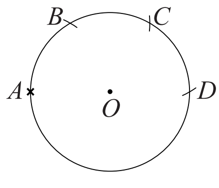
9. osztály: 10 darab ilyen részhalmaz van, ezek a következők:

$\{1; 2; 3; 4\}$, $\{1; 2; 4; 5\}$, $\{1; 2; 5; 6\}$, $\{1; 2; 6; 7\}$, $\{2; 3; 4; 5\}$,

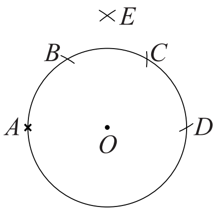
$\{2; 3; 5; 6\}$, $\{2; 3; 6; 7\}$, $\{3; 4; 5; 6\}$, $\{3; 4; 6; 7\}$, $\{4; 5; 6; 7\}$.

Bármely első négy különböző helyes részhalmaz **1-1 pontot**, bármely további különböző helyes részhalmaz **2-2 pontot** ér. (Összesen **max. 16 pont**.)

10. osztály: Jelöljünk ki a köríven egy A pontot, és lépjünk háromszor a sugárral A-ból indulva a köríven (**2 pont**). Az új pontok legyenek rendre B, C és D.

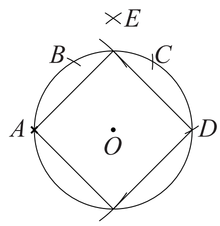


Ekkor AD a kör átmérője lesz (hiszen egy szabályos hatszög négy szomszédos csúcsát jelöltük ki). Mivel az ACD egy olyan háromszög a körön, amelynek AD átmérője, ezért ez a háromszög derékszögű (**2 pont**), és ha a kör sugara R, akkor Pitagorasz tétele alapján $AC = R \cdot \sqrt{3}$ (**2 pont**). Ha



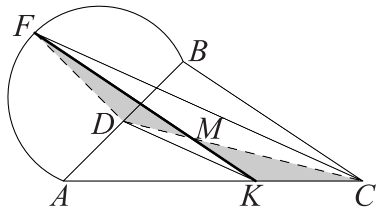
most A-ból és D-ből egy-egy $R \cdot \sqrt{3}$ sugarú körívet rajzolunk, és ezek egyik metszéspontja E (**2 pont**), akkor az AED háromszög egyenlő szárú lesz, és AD alapjának O felezőpontja egyben a kör középpontja. Így az AED háromszögben EO egyben magasság is, ezért Pitagorasz tételét ismét alkalmazva az $OE = R \cdot \sqrt{2}$ összefüggést kapjuk (**2 pont**).

Mivel az R sugarú körbe írt négyzet oldalhossza éppen $R \cdot \sqrt{2}$ (**2 pont**), ezért OE hossza pont megegyezik a körbe írt négyzet oldalhosszával. Így ha A-ból OE sugárral körzünk (**2 pont**), akkor az így rajzolt körív és az eredeti kör metszéspontjai A-val és D-vel együtt éppen a szerkesztendő négyzet csúcsai lesznek (**2 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)



*Ha egy csapat csak követhető rajzot készít, azért **8 pont** jár. Csak jó ábráért, amelyen nem követhetők a szerkesztés lépései, **4 pont** adható. Ha ábrát nem rajzol a csapat, de a leírás hibátlan, akkor jár érte a **16 pont**.*

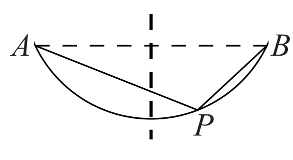
11. osztály: Legyen az ABC háromszög AB oldalára rajzolt körív felezőpontja F. Ha az F-ből AB-re állított merőleges talppontja D, akkor D felezi AB-t, és így az AFB körszeletet FD két egyenlő területű részre osztja (**2 pont**). Mivel az ABC háromszögben CD súlyvonal, ezért CD felezi az ABC háromszög területét (**2 pont**), vagyis az FDC töröttvonal felezi a vizsgált síkidom területét. A továbbiakban ezt a töröttvonalat szeretnénk egy olyan egyenessel helyettesíteni, amely szintén felezi a területet.



Szerkesszünk FC-vel párhuzamost D-n keresztül (**2 pont**), és e párhuzamosnak AC-vel való metszéspontja legyen K. Mivel $DK \parallel FC$, ezért $CFDK$ trapéz (**2 pont**). Ha FK-nak DC-vel való metszéspontja M, akkor az FCD és FCK háromszögek területe egyenlő, mivel FC alapjuk közös, és FC-hez tartozó magasságuk hossza egyenlő (a trapéz magasságával azonos), tehát $T_{FCD} = T_{FCK} \Leftrightarrow T_{FCD} - T_{FCM} = T_{FCK} - T_{FCM} \Leftrightarrow T_{FMD} = T_{MCK}$ (**2 pont**). Tudjuk, hogy az említett FDC töröttvonal B-t tartalmazó oldalán fekvő terület nagysága – az FDB kördarab és a BDC háromszög területének összege – a vizsgált síkidom területének fele. Ebben az FDM háromszög területét kicserélhetjük a vele egyenlő területű KMC háromszög területére (**2 pont**). Így azt kapjuk, hogy az FK egyenes felezi a körszeletből és háromszögből álló síkidom területét (**2 pont**). A helyes ábráért további **2 pont** jár. (Összesen **max. 16 pont**.) *Indoklás nélküli jó ábráért legfeljebb **6 pont** adható.*

*Amennyiben egy csapat egyenlő szárú háromszögből indul (AC=BC), és ebben a speciális esetben az FC szimmetriatengelyt adja meg területfelező egyenesként, úgy csak az első **4 pont** adható meg.*

12. osztály: Mivel az $APB\measuredangle$ kerületi szög, így P helyzetétől függetlenül az $APB\measuredangle$ nagysága állandó (**3 pont**) (Természetesen P-nek különböznie kell A-tól és B-től, hiszen $P = A$ vagy $P = B$ esetén a vizsgált szorzat értéke 0.) Mivel $T_{APB} = \dfrac{AP \cdot PB \cdot \sin APB\measuredangle}{2}$ (**2 pont**), így ez a terület ugyanakkor maximális, amikor az $AP \cdot PB$ szorzat maximális, hiszen $\sin APB\measuredangle$ értéke állandó. Elegendő tehát a terület maximumát meghatároznunk (**3 pont**).



Másrészt a rögzített AB alap esetén az APB háromszög területe akkor maximális, ha az AB-hez tartozó magasság maximális (**3 pont**). Így P megfelelő helyzetét úgy kapjuk meg, hogy AB felezőpontjában AB-re merőlegest szerkesztünk, és ahol ez a merőleges metszi az adott körívet, ott lesz a P pont (**3 pont**). *(Amennyiben egy csapat a merőleges és a teljes körvonal másik metszéspontját is elfogadja, vagy csak azt fogadja el – amely hibás, hiszen nincs a megadott köríven –, úgy ebből a 3 pontból csak 1-et kaphat.)* Jó ábráért további **2 pont** jár. (Összesen **max. 16 pont**.) *Amennyiben egy csapat nem indokolt, de helyes ábrát készített, arra **4 pont** adható.*