BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ, 2016. MÁRCIUS 5.

MEGOLDÓKULCS és JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

	9. osztály	10. osztály		11. osztály	12. osztály	
1.	**A B C D**	**A B C D E**	1.	**A B C D**	**B C**	1.
2.	**A D E**	**A C**	2.	**C D E**	**A D E**	2.
3.	**A B C**	**A B**	3.	**B**	**A B D E**	3.
4.	**A B**	**A C**	4.	**A B C D E**	**A B C D E**	4.
Max.	*60+16 pont*	*59+16 pont*	*Max.*	*61+16 pont*	*62+16 pont*	*Max.*

9. osztály 5. feladat: A feltételekből adódóan $a+b+c\neq 0$ (**2 pont**) és a $\frac{2ab+2bc+2ca}{a+b+c}$ tört értéke is egész szám (**4 pont**). Csakhogy $a+b+c=\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c}=\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{a+b+c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}+\frac{2ab+2bc+2ca}{a+b+c}$ (**6 pont**), és így $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}=(a+b+c)-\frac{2ab+2bc+2ca}{a+b+c}$ is egész szám (**4 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)

10. osztály 5. feladat: Az eredeti egyenlőtlenséggel egyenértékűek a következő kijelentések: $\frac{2x^2y}{x^4+y^2}+\frac{2y^2x}{y^4+x^2}\le 2$ (**4 pont**), $\left(1-\frac{2x^2y}{x^4+y^2}\right)+\left(1-\frac{2y^2x}{y^4+x^2}\right)\ge 0$ (**4 pont**), $\frac{(x^2-y)^2}{x^4+y^2}+\frac{(y^2-x)^2}{y^4+x^2}\ge 0$ (**4 pont**). Az utóbbi állítás igaz, hiszen mindkét tört nevezője pozitív, számlálója nemnegatív, így az eredeti állítás is igaz (**4 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)

11. osztály 5. feladat: Az egyenlet még $n-1=3\left[\sqrt{n}\right]$ vagy $\left[\sqrt{n}\right]=\frac{n-1}{3}$ alakba is írható, tehát $n=3k+1$, ahol k pozitív egész (**2 pont**). Ekkor az egyenlet utóbbi formája így is írható: $\left[\sqrt{3k+1}\right]=k$ (**2 pont**). Az egészrész értelmezése alapján: $\sqrt{3k+1}-1<\left[\sqrt{3k+1}\right]\le\sqrt{3k+1}$, ami $\sqrt{3k+1}-1<k\le\sqrt{3k+1}$ alakban is felírható (**2 pont**).

Ez utóbbi kifejezés első egyenlőtlenségéből $\sqrt{3k+1}<k+1$, ahonnan négyzetre emeléssel $k^2+2k+1>3k+1$, vagyis $k>1$ (**2 pont**). A második egyenlőtlenség alapján pedig $k^2\le 3k+1$, vagyis $k^2-3k-1\le 0$, ahonnan $\frac{3-\sqrt{13}}{2}\le k\le\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (**2 pont**), és mivel k pozitív egész, így $1\le k\le 3$ (**1 pont**). Figyelembe véve a $k>1$ összefüggést, következik, hogy k értéke 2 vagy 3 lehet (**2 pont**).
Ha $k=2$, akkor $n=3k+1=7$ (**1 pont**), ha pedig $k=3$, akkor $n=3k+1=10$ (**1 pont**). Ezek valóban teljesítik az egyenlőséget (**1 pont**), így az egyenlet két megoldása $n=7$ és $n=10$. (Összesen **max. 16 pont**.)

12. osztály 5. feladat: Igen, léteznek ilyen számok (**2 pont**). Például $x=2\sqrt{2}$ és $y=1-\sqrt{2}$ esetén (**8 pont**) a két kifejezés értéke $x+y^2=2\sqrt{2}+\left(1-\sqrt{2}\right)^2=3$, illetve $x+2y=2\sqrt{2}+2\left(1-\sqrt{2}\right)=2$ (**6 pont**), amelyek valóban racionálisak. (Összesen **max. 16 pont**.)

Megjegyzés: Egy lehetséges módszer a két szám megtalálására a következő. Legyenek p és q olyan racionális számok, amelyekre $x+y^2=p$ és $x+2y=q$. Ekkor $y^2-2y-p+q=0$, ahol $-p+q$ értékét olyannak kell választanunk, hogy ennek az y-ra nézve másodfokú egyenletnek legyen irracionális gyöke. Ez teljesül például $-p+q=-1$ esetén, amikor $y=1\pm\sqrt{2}$ irracionális. Ha $y=1-\sqrt{2}$, akkor $x+2y$ racionális lesz például az irracionális $x=2\sqrt{2}$ választásával, ahonnan $q=2$ és így $p=3$ adódik.

*Természetesen a maximális pontszám eléréséhez nem szükséges a megjegyzésben foglaltak leírása. Ha viszont egy csapat a megjegyzés szerinti útvonalon indul el, akkor y megtalálásáért **8 pont**, x megtalálásáért **6 pont**, a helyes válaszért **2 pont** adható.*