

**BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ, 2016. MÁRCIUS 5.**

MEGOLDÓKULCS és JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

	9. osztály	10. osztály		11. osztály	12. osztály	
1.	A B C D	A B C D E	1.	A B C D	B C	1.
2.	A D E	A C	2.	C D E	A D E	2.
3.	A B C	A B	3.	B	A B D E	3.
4.	A B	A C	4.	A B C D E	A B C D E	4.
Max.	60+16 pont	59+16 pont	Max.	61+16 pont	62+16 pont	Max.

9. osztály 5. feladat: A feltételekből adódóan $a + b + c \neq 0$ (2 pont) és a $\frac{2ab + 2bc + 2ca}{a + b + c}$ tört értéke is egész szám

(4 pont). Csakhogy $a + b + c = \frac{(a + b + c)^2}{a + b + c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca}{a + b + c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} + \frac{2ab + 2bc + 2ca}{a + b + c}$

(6 pont), és így $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} = (a + b + c) - \frac{2ab + 2bc + 2ca}{a + b + c}$ is egész szám (4 pont). (Összesen max. 16 pont.)

10. osztály 5. feladat: Az eredeti egyenlőtléssel egyenértékűek a következő kijelentések:

$\frac{2x^2y}{x^4 + y^2} + \frac{2y^2x}{y^4 + x^2} \leq 2$ (4 pont), $\left(1 - \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}\right) + \left(1 - \frac{2y^2x}{y^4 + x^2}\right) \geq 0$ (4 pont), $\frac{(x^2 - y)^2}{x^4 + y^2} + \frac{(y^2 - x)^2}{y^4 + x^2} \geq 0$ (4 pont). Az utóbbi állítás igaz, hiszen mindkét tört nevezője pozitív, számlálója nemnegatív, így az eredeti állítás is igaz (4 pont). (Összesen max. 16 pont.)

11. osztály 5. feladat: Az egyenlet még $n - 1 = 3\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ vagy $\lfloor\sqrt{n}\rfloor = \frac{n - 1}{3}$ alakba is írható, tehát $n = 3k + 1$, ahol k pozitív egész (2 pont). Ekkor az egyenlet utóbbi formája így is írható: $\lfloor\sqrt{3k + 1}\rfloor = k$ (2 pont). Az egészrész értelmezése alapján: $\sqrt{3k + 1} - 1 < \lfloor\sqrt{3k + 1}\rfloor \leq \sqrt{3k + 1}$, ami $\sqrt{3k + 1} - 1 < k \leq \sqrt{3k + 1}$ alakban is felírható (2 pont).

Ez utóbbi kifejezés első egyenlőtlenségéből $\sqrt{3k + 1} < k + 1$, ahonnan négyzetre emeléssel $k^2 + 2k + 1 > 3k + 1$, vagyis $k > 1$ (2 pont). A második egyenlőtlenség alapján pedig $k^2 \leq 3k + 1$, vagyis $k^2 - 3k - 1 \leq 0$, ahonnan $\frac{3 - \sqrt{13}}{2} \leq k \leq \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ (2 pont), és mivel k pozitív egész, így $1 \leq k \leq 3$ (1 pont). Figyelembe véve a $k > 1$ összefüggést, következik, hogy k értéke 2 vagy 3 lehet (2 pont).

Ha $k = 2$, akkor $n = 3k + 1 = 7$ (1 pont), ha pedig $k = 3$, akkor $n = 3k + 1 = 10$ (1 pont). Ezek valóban teljesítik az egyenlőséget (1 pont), így az egyenlet két megoldása $n = 7$ és $n = 10$. (Összesen max. 16 pont.)

12. osztály 5. feladat: Igen, léteznek ilyen számok (2 pont). Például $x = 2\sqrt{2}$ és $y = 1 - \sqrt{2}$ esetén (8 pont) a két kifejezés értéke $x + y^2 = 2\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})^2 = 3$, illetve $x + 2y = 2\sqrt{2} + 2(1 - \sqrt{2}) = 2$ (6 pont), amelyek valóban racionálisak. (Összesen max. 16 pont.)

Megjegyzés: Egy lehetséges módszer a két szám megtalálására a következő. Legyenek p és q olyan racionális számok, amelyekre $x + y^2 = p$ és $x + 2y = q$. Ekkor $y^2 - 2y - p + q = 0$, ahol $-p + q$ értékét olyannak kell választanunk, hogy ennek az y -ra nézve másodfokú egyenletnek legyen irracionális gyöke. Ez teljesül például $-p + q = -1$ esetén, amikor $y = 1 \pm \sqrt{2}$ irracionális. Ha $y = 1 - \sqrt{2}$, akkor $x + 2y$ racionális lesz például az irracionális $x = 2\sqrt{2}$ választásával, ahonnan $q = 2$ és így $p = 3$ adódik.

Természetesen a maximális pontszám eléréséhez nem szükséges a megjegyzésben foglalt leírása. Ha viszont egy csapat a megjegyzés szerinti útvonalon indul el, akkor y megtalálásáért 8 pont, x megtalálásáért 6 pont, a helyes választásért 2 pont adható.