BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
KÖRZETI FORDULÓ, 2016. JANUÁR 8.

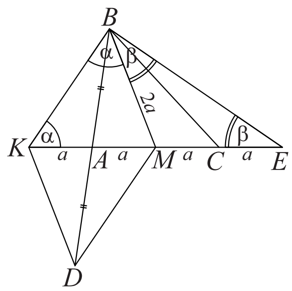
MEGOLDÓKULCS

	9. osztály	10. osztály		11. osztály	12. osztály	
1.	**A**	**B C**	1.	**C**	**C**	1.
2.	**E**	**A B C D E**	2.	**A B C**	**E**	2.
3.	**A C**	**E**	3.	**A B C D E**	**D**	3.
4.	**D**	**A B C D E**	4.	**C**	**A B C**	4.
5.	**A C E**	**A C**	5.	**C E**	**A B C D E**	5.
6.	**B C D E**	**A**	6.	**A E**	**B**	6.
7.	**A D E**	**B**	7.	**A B**	**A B**	7.
8.	**D**	**D**	8.	**D**	**A**	8.
9.	**A B**	**A B C D E**	9.	**B**	**A C E**	9.
10.	**C**	**A C**	10.	**A B**	**B D**	10.
11.	**B**	**B**	11.	**A B C D E**	**A B C D E**	11.
12.	**C**	**C**	12.	**B E**	**C E**	12.
13.	**D**	**D**	13.	**B D E**	**C**	13.
Max.	*178+16 pont*	*184+16 pont*	*Max.*	*186+16 pont*	*184+16 pont*	*Max.*

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ A 14. FELADATOKHOZ

9. osztály:
Megfelelő számok a következők:
$k = 2^8 = 256$ (**4 pont**), hiszen $\sqrt{2^8\sqrt{2^8\sqrt{2^8}}} = \sqrt{2^8\sqrt{2^8\cdot 2^4}} = \sqrt{2^8\cdot 2^4\cdot 2^2} = 2^4\cdot 2^2\cdot 2^1 = 128$ (**4 pont**); illetve
$k = 3^8 = 6561$ (**4 pont**), hiszen $\sqrt{3^8\sqrt{3^8\sqrt{3^8}}} = 3^4\cdot 3^2\cdot 3^1 = 2187$ (**4 pont**).
Más megfelelő szám nincs. (Összesen **max. 16 pont**.)

10. osztály:
Legyen *K* az *M* tükörképe *A*-ra nézve (**4 pont**). Ekkor a *BKDM* négyszög átlói felezik egymást, ezért ez paralelogramma, tehát $DM \parallel KB$ (**2 pont**). Ha α jelöli az *MKB* szöget, akkor a *KBM* szög is α nagyságú, mivel a tükrözés miatt $KA = AM = a$, és így $KM = MB = 2a$, vagyis az *MKB* háromszög egyenlő szárú (**2 pont**). Mivel az *MBE* háromszög is egyenlő szárú ($ME = MB = 2a$), így β-val jelölve az *MEB* szöget, az *MBE* szög nagysága is β (**2 pont**). A *KBE* háromszög belső szögeinek összege 180°, így $2\alpha + 2\beta = 180°$, ahonnan $\alpha + \beta = 90°$, vagyis $KBE\measuredangle = 90°$ (**2 pont**), tehát $KB \perp BE$ (**2 pont**). Már megállapítottuk, hogy $DM \parallel KB$, így ezekből a bizonyítandó $DM \perp BE$ állítás is következik (**2 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)



(Az, hogy a *KBE* szög derékszög, azzal az észrevétellel is igazolható, hogy a *K*, *B* és *E* pontok rajta vannak az *M* középpontú $2a$ sugarú körön, így *KBE* egy félkörbe írt háromszög, tehát derékszögű.)

11. osztály:
Az egyenlőség minden valós *x*-re igaz, így akkor is, ha *x* helyére 1-et írunk (**2 pont**). Ekkor $f\left(f\left(1\right)\right)=1$ (**2 pont**). Az eredeti egyenlőség igaz akkor is, ha $x = f\left(1\right)$ (**2 pont**), vagyis $f\left(f\left(f\left(1\right)\right)\right) = f^2\left(1\right) - f\left(1\right) + 1$. Ez utóbbi egyenlőség, ha figyelembe vesszük az $f\left(f\left(1\right)\right)=1$ összefüggést, $f\left(1\right) = f^2\left(1\right) - f\left(1\right) + 1$ alakban írható (**4 pont**), amit rendezve az $f^2\left(1\right) - 2f\left(1\right) + 1 = 0$ egyenlőséghez jutunk (**2 pont**), ahonnan $\left[f\left(1\right)-1\right]^2 = 0$ (**2 pont**), vagyis $f\left(1\right) - 1 = 0$, tehát $f\left(1\right) = 1$ (**2 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)

12. osztály:
Ha x_1 és x_2 az $x^2 + ax + b + 1 = 0$ egyenlet pozitív egész gyökei, akkor a Viéte-formulák szerint $x_1 + x_2 = -a$ (**2 pont**) és $x_1 \cdot x_2 = b + 1$ (**2 pont**). Ez utóbbiból $b = x_1 \cdot x_2 - 1$ (**2 pont**), és így igazak a következők:
$a^2 + b^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 + \left(x_1x_2 - 1\right)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 \cdot x_2^2 + 1 = \left(1 + x_1^2\right)\left(1 + x_2^2\right)$ (**4 pont**). Innen látható, hogy $a^2 + b^2$ olyan kéttényezős szorzat (**2 pont**), amelynek két tényezője közül mindkettő értéke legalább 2 (**2 pont**), így ez biztosan összetett szám (**2 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)