

**BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
KÖRZETI FORDULÓ, 2016. JANUÁR 8.**

MEGOLDÓKULCS

	9. osztály	10. osztály		11. osztály	12. osztály	
1.	A	B C	1.	C	C	1.
2.	E	A B C D E	2.	A B C	E	2.
3.	A C	E	3.	A B C D E	D	3.
4.	D	A B C D E	4.	C	A B C	4.
5.	A C E	A C	5.	C E	A B C D E	5.
6.	B C D E	A	6.	A E	B	6.
7.	A D E	B	7.	A B	A B	7.
8.	D	D	8.	D	A	8.
9.	A B	A B C D E	9.	B	A C E	9.
10.	C	A C	10.	A B	B D	10.
11.	B	B	11.	A B C D E	A B C D E	11.
12.	C	C	12.	B E	C E	12.
13.	D	D	13.	B D E	C	13.
Max.	178+16 pont	184+16 pont	Max.	186+16 pont	184+16 pont	Max.

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ A 14. FELADATOKHOZ

9. osztály:

Megfelelő számok a következők:

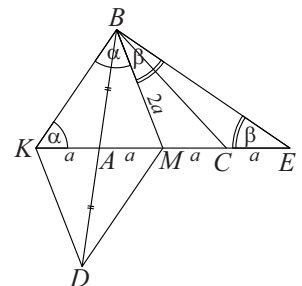
$k = 2^8 = 256$ (4 pont), hiszen $\sqrt{2^8 \sqrt{2^8 \sqrt{2^8}}} = \sqrt{2^8 \sqrt{2^8 \cdot 2^4}} = \sqrt{2^8 \cdot 2^4 \cdot 2^2} = 2^4 \cdot 2^2 \cdot 2^1 = 128$ (4 pont); illetve

$k = 3^8 = 6561$ (4 pont), hiszen $\sqrt{3^8 \sqrt{3^8 \sqrt{3^8}}} = 3^4 \cdot 3^2 \cdot 3^1 = 2187$ (4 pont).

Más megfelelő szám nincs. (Összesen max. 16 pont.)

10. osztály:

Legyen K az M tükörképe A -ra nézve (4 pont). Ekkor a $BKDM$ négyszög átlói felezik egymást, ezért ez paralelogramma, tehát $DM \parallel KB$ (2 pont). Ha α jelöli az MKB szöget, akkor a KBM szög is α nagyságú, mivel a tükrözés miatt $KA = AM = a$, és így $KM = MB = 2a$, vagyis az MKB háromszög egyenlő szárú (2 pont). Mivel az MBE háromszög is egyenlő szárú ($ME = MB = 2a$), így β -val jelölve az MEB szöget, az MBE szög nagysága is β (2 pont). A KBE háromszög belső szögeinek összege 180° , így $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, ahonnan $\alpha + \beta = 90^\circ$, vagyis $\angle KBE = 90^\circ$ (2 pont), tehát $KB \perp BE$ (2 pont). Már megállapítottuk, hogy $DM \parallel KB$, így ezekből a bizonyítandó $DM \perp BE$ állítás is következik (2 pont). (Összesen max. 16 pont.)



(Az, hogy a KBE szög derékszög, azzal az észrevétellel is igazolható, hogy a K , B és E pontok rajta vannak az M középpontú $2a$ sugarú körön, így KBE egy félkörbe írt háromszög, tehát derékszögű.)

11. osztály:

Az egyenlőség minden valós x -re igaz, így akkor is, ha x helyére 1-et írunk (2 pont). Ekkor $f(f(1)) = 1$ (2 pont). Az eredeti egyenlőség igaz akkor is, ha $x = f(1)$ (2 pont), vagyis $f(f(f(1))) = f^2(1) - f(1) + 1$. Ez utóbbi egyenlőség, ha figyelembe vesszük az $f(f(1)) = 1$ összefüggést, $f(1) = f^2(1) - f(1) + 1$ alakban írható (4 pont), amit rendezve az $f^2(1) - 2f(1) + 1 = 0$ egyenlőséghez jutunk (2 pont), ahonnan $[f(1) - 1]^2 = 0$ (2 pont), vagyis $f(1) - 1 = 0$, tehát $f(1) = 1$ (2 pont). (Összesen max. 16 pont.)

12. osztály:

Ha x_1 és x_2 az $x^2 + ax + b + 1 = 0$ egyenlet pozitív egész gyökei, akkor a Viète-formulák szerint $x_1 + x_2 = -a$ (2 pont) és $x_1 \cdot x_2 = b + 1$ (2 pont). Ez utóbbiból $b = x_1 \cdot x_2 - 1$ (2 pont), és így igazak a következők:

$a^2 + b^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 x_2 - 1)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 \cdot x_2^2 + 1 = (1 + x_1^2)(1 + x_2^2)$ (4 pont). Innen látható, hogy $a^2 + b^2$ olyan kéttényezős szorzat (2 pont), amelynek két tényezője közül mindkettő értéke legalább 2 (2 pont), így ez biztosan összetett szám (2 pont). (Összesen max. 16 pont.)