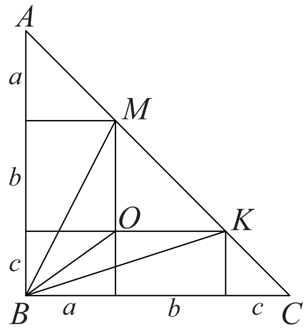
BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ, 2017. MÁRCIUS 4.

MEGOLDÓKULCS és JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

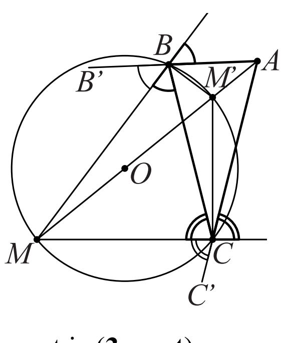
	9. osztály	10. osztály		11. osztály	12. osztály	
1.	**D**	**D**	1.	**D**	**B C D E**	1.
2.	**C D**	**B**	2.	**A B C**	**A B C D E**	2.
3.	**D**	**C**	3.	**A C**	**B**	3.
4.	**D E**	**B**	4.	**E**	**D**	4.
5.	**A B C**	**A B C D**	5.	**A B C**	**A B C**	5.
6.	**E**	**B**	6.	**B C**	**B**	6.
7.	**B C**	**B E**	7.	**C D**	**B**	7.
8.	**A**	**B D**	8.	**B C**	**B C E**	8.
9.	**D**	**A B C**	9.	**B C E**	**A B C D E**	9.
Max.	*122+16 pont*	*124+16 pont*	*Max.*	*127+16 pont*	*132+16 pont*	*Max.*

9. osztály 10. feladat: A páros számok négyzete osztható 4-gyel (**2 pont**). A páratlan számok felírhatók $2k+1$ alakban, ahol *k* egész. Ennek négyzete $4k^2+4k+1=4\left(k^2+k\right)+1$, ezért a páratlan számok négyzete 4-gyel osztva 1 maradékot ad (**3 pont**). A 13 vizsgált szám között 6 vagy 7 páratlan található (**3 pont**). Az összeg 4-es maradékát megkaphatjuk a tagok 4-es maradékainak összegeként (**2 pont**). A páros számok maradéka 0, ezért ezekkel nem kell foglalkozni, a páratlanok maradéka pedig vagy $6\cdot 1$ vagy $7\cdot 1$, tehát 2 vagy 3 (**3 pont**). Viszont az előbb beláttuk, hogy egy négyzetszám 4-es maradéka csak 0 vagy 1 lehet (**1 pont**), ezért a vizsgált összeg nem lehet négyzetszám (**2 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)

10. osztály 10. feladat: Húzzunk *M*-en és *K*-n keresztül párhuzamosokat a befogókkal (**1 pont**)! Ekkor az *ABC* háromszög belsejében kialakul három egyenlő szárú derékszögű háromszög, amelyek átfogója *AM*, *MK* és *KC* (**1 pont**). Legyenek ezek befogói rendre *a*, *b* és *c*. Így $AM^2=2a^2$, $MK^2=2b^2$ és $KC^2=2c^2$ (**1 pont**). Legyen továbbá *O* az *MK* átfogójú háromszög derékszögű csúcsa, és tekintsük az *O* középpontú, *b* sugarú kört (**2 pont**). Ennek *MK* egy húrja (**1 pont**), amelyhez $MOK\measuredangle=90°$-os középponti szög tartozik, ezért az *MK* húrhoz tartozó kerületi szög 45°-os (**2 pont**). Így minden olyan pont, amely az *MK* egyenes *O*-t tartalmazó oldalán van, és ahonnan az *MK* szakasz 45°-os szögben látszik, rajta van ezen a körön (**3 pont**), vagyis $OB=b$ (**1 pont**). Mivel *OB* egy *a* és *c* oldalú téglalap átlója (**2 pont**), ezért Pitagorasz tétele miatt $OB^2=b^2=a^2+c^2$, azaz $2b^2=2a^2+2c^2$ (**1 pont**), vagyis $MK^2=AM^2+KC^2$ (**1 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)



11. osztály 10. feladat: Vegyük fel a *BCM* háromszög körülírt körén azt az *M’* pontot, amelyre *MM’* a kör átmérője. Thalész tétele miatt ekkor *M’B* merőleges *MB*-re, továbbá *M’C* merőleges *MC*-re (**6 pont**). Az is igaz, hogy *M’* az *ABC* háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja, hiszen például a *B* csúcsnál az *M’BC* szög és az *M’BA* szög egyaránt 90°-ra egészíti ki az egymással egyenlő beesési és visszaverődési szöget (és ugyanez a *C* csúcsnál is elmondható), így *M’B* és *M’C* szögfelezők az *ABC* háromszögben (**3 pont**).
Legyenek *B’* és *C’* olyan tetszőleges pontok, amelyekre a *B’*, *B*, *A*, illetve a *C’*, *C*, *A* pontok ebben a sorrendben egy-egy egyenesre esnek. Ekkor az *M* pont illeszkedik a *B’BC* és a *BCC’* szögek szögfelezőire, ami azt jelenti, hogy *M* ugyanolyan távol van az *AB*, *BC*, *AC* egyenesek mindegyikétől, vagyis *M* illeszkedik a *BAC* szög szögfelezőjére is (**4 pont**). Tehát az *A*, *M’*, *M* pontok egy egyenesre illeszkednek, amelyen rajta van *M’M* felezőpontja, az *O* pont is (**3 pont**). (Összesen **max. 16 pont**.)



12. osztály 10. feladat: Forgassuk el az *OCN* háromszöget az *O* pont körül 180°-kal (**3 pont**), így kapjuk az ábra szerint az *OAN’* háromszöget (**2 pont**). Az *MAN’O* négyszögben az *MAN’* és az *MON’* szögek derékszögek (**2 pont**), hiszen
$MAN'\measuredangle=BAC\measuredangle+BCA\measuredangle=90°$ és $MON'\measuredangle=MOA\measuredangle+NOC\measuredangle=180°-MON\measuredangle=90°$
(**4 pont**). Ebből következik, hogy $\left(MN'\right)^2=AM^2+\left(AN'\right)^2=OM^2+\left(ON'\right)^2$ (**2 pont**).
Továbbá $ON'=ON$ és $MN^2=OM^2+ON^2$ (**2 pont**), illetve $AN'=CN$, azaz
$MN^2=OM^2+\left(ON'\right)^2=AM^2+\left(AN'\right)^2=AM^2+CN^2$, így az állítást beláttuk (**1 pont**).
(Összesen **max. 16 pont**.)