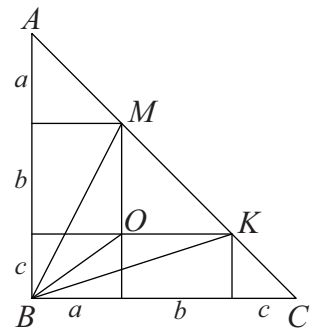


BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ, 2017. MÁRCIUS 4.
MEGOLDÓKULCS és JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

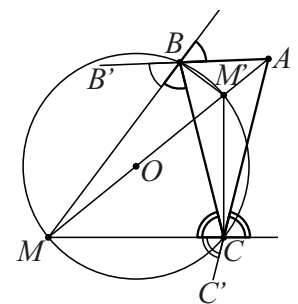
	9. osztály	10. osztály		11. osztály	12. osztály	
1.	D	D	1.	D	B C D E	1.
2.	C D	B	2.	A B C	A B C D E	2.
3.	D	C	3.	A C	B	3.
4.	D E	B	4.	E	D	4.
5.	A B C	A B C D	5.	A B C	A B C	5.
6.	E	B	6.	B C	B	6.
7.	B C	B E	7.	C D	B	7.
8.	A	B D	8.	B C	B C E	8.
9.	D	A B C	9.	B C E	A B C D E	9.
Max.	122+16 pont	124+16 pont	Max.	127+16 pont	132+16 pont	Max.

9. osztály 10. feladat: A páros számok négyzete osztható 4-gyel (2 pont). A páratlan számok felírhatók $2k+1$ alakban, ahol k egész. Ennek négyzete $4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$, ezért a páratlan számok négyzete 4-gyel osztva 1 maradékot ad (3 pont). A 13 vizsgált szám között 6 vagy 7 páratlan található (3 pont). Az összeg 4-es maradékát megkaphatjuk a tagok 4-es maradékainak összegeként (2 pont). A páros számok maradéka 0, ezért ezekkel nem kell foglalkozni, a páratlanok maradéka pedig vagy $6 \cdot 1$ vagy $7 \cdot 1$, tehát 2 vagy 3 (3 pont). Viszont az előbb beláttuk, hogy egy négyzetszám 4-es maradéka csak 0 vagy 1 lehet (1 pont), ezért a vizsgált összeg nem lehet négyzetszám (2 pont). (Összesen max. 16 pont.)

10. osztály 10. feladat: Húzzunk M -en és K -n keresztül párhuzamosokat a befogókkal (1 pont)! Ekkor az ABC háromszög belsejében kialakul három egyenlő szárú derékszögű háromszög, amelyek átfogója AM , MK és KC (1 pont). Legyenek ezek befogói rendre a , b és c . Így $AM^2 = 2a^2$, $MK^2 = 2b^2$ és $KC^2 = 2c^2$ (1 pont). Legyen továbbá O az MK átfogójú háromszög derékszögű csúcsa, és tekintsük az O középpontú, b sugarú kört (2 pont). Ennek MK egy húrja (1 pont), amelyhez $\angle MOK = 90^\circ$ -os középponti szög tartozik, ezért az MK húrhoz tartozó kerületi szög 45° -os (2 pont). Így minden olyan pont, amely az MK egyenes O -t tartalmazó oldalán van, és ahonnan az MK szakasz 45° -os szögben látszik, rajta van ezen a körön (3 pont), vagyis $OB = b$ (1 pont). Mivel OB egy a és c oldalú téglalap átlója (2 pont), ezért Pitagorasz tétele miatt $OB^2 = b^2 = a^2 + c^2$, azaz $2b^2 = 2a^2 + 2c^2$ (1 pont), vagyis $MK^2 = AM^2 + KC^2$ (1 pont). (Összesen max. 16 pont.)



11. osztály 10. feladat: Vegyük fel a BCM háromszög körülírt körén azt az M' pontot, amelyre MM' a kör átmérője. Thalész tétele miatt ekkor $M'B$ merőleges MB -re, továbbá $M'C$ merőleges MC -re (6 pont). Az is igaz, hogy M' az ABC háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja, hiszen például a B csúcsnál az $M'BC$ szög és az $M'BA$ szög egyaránt 90° -ra egészíti ki az egymással egyenlő beesési és visszaverődési szöveget (és ugyanez a C csúcsnál is elmondható), így $M'B$ és $M'C$ szögfelezők az ABC háromszögben (3 pont). Legyenek B' és C' olyan tetszőleges pontok, amelyekre a B', B, A , illetve a C', C, A pontok ebben a sorrendben egy-egy egyenesre esnek. Ekkor az M pont illeszkedik a $B'BC$ és a BCC' szögek szögfelezőire, ami azt jelenti, hogy M ugyanolyan távol van az AB , BC , AC egyenesek mindegyikétől, vagyis M illeszkedik a BAC szög szögfelezőjére is (4 pont). Tehát az A, M', M pontok egy egyenesre illeszkednek, amelyen rajta van $M'M$ felezőpontja, az O pont is (3 pont). (Összesen max. 16 pont.)



12. osztály 10. feladat: Forgassuk el az OCN háromszöget az O pont körül 180° -kal (3 pont), így kapjuk az ábra szerint az OAN' háromszöget (2 pont). Az $MAN'O$ négyszögben az $\angle MAN'$ és az $\angle MON'$ szögek derékszögek (2 pont), hiszen $\angle MAN' = \angle BAC + \angle BCA = 90^\circ$ és $\angle MON' = \angle MOA + \angle NOC = 180^\circ - \angle MON = 90^\circ$ (4 pont). Ebből következik, hogy $(MN')^2 = AM^2 + (AN')^2 = OM^2 + (ON')^2$ (2 pont). Továbbá $ON' = ON$ és $MN^2 = OM^2 + ON^2$ (2 pont), illetve $AN' = CN$, azaz $MN^2 = OM^2 + (ON')^2 = AM^2 + (AN')^2 = AM^2 + CN^2$, így az állítást beláttuk (1 pont). (Összesen max. 16 pont.)

