

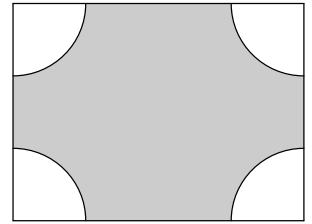
**BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
KÖRZETI FORDULÓ, 2017. JANUÁR 6.**

MEGOLDÓKULCS

	9. osztály	10. osztály		11. osztály	12. osztály	
1.	D	D	1.	A B C D	A C E	1.
2.	A C E	B E	2.	A B C D	A B C D E	2.
3.	A E	A B C D	3.	C	C D E	3.
4.	A B C E	C D E	4.	B C D E	C D	4.
5.	A B D	B D	5.	A B D	A B C	5.
6.	B	C D	6.	B D E	A B C D	6.
7.	D E	C D	7.	A C E	A E	7.
8.	C	A B D	8.	A B C	B E	8.
9.	E	A B C D	9.	D	A B	9.
10.	D	C E	10.	C D E	C D E	10.
11.	A B C	D	11.	A B C	C D E	11.
12.	A	C D E	12.	D	A B C D E	12.
13.	C D E	D E	13.	C	D E	13.
<i>Max.</i>	<i>182+16 pont</i>	<i>187+16 pont</i>	<i>Max.</i>	<i>190+16 pont</i>	<i>195+16 pont</i>	<i>Max.</i>

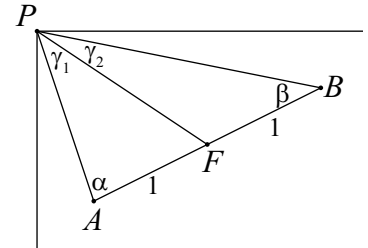
BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
KÖRZETI FORDULÓ, 2017. JANUÁR 6.
JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ A 14. FELADATOKHOZ

9. osztály: Az összekarcolt részt úgy kapjuk meg, hogy a téglalap alakú plató négy sarkából egy-egy 1 m sugarú körvonalat rajzolunk, majd elhagyjuk a téglalaptól a körívek által határolt negyedköröket. Az így kapott (az ábrán szürkítéssel jelölt) terület minden pontja (a határvonalával együtt) összekarcolható.



A szürkített terület minden pontjához található a faágnak olyan állása, amikor a szög éppen az adott pontban található: A negyedkörívek pontjait úgy kaphatjuk meg, hogy a faág egyik végét a megfelelő sarokba helyezzük, majd az ágat a kívánt állásba forgatjuk. A téglalap határára eső pontokat úgy kaphatjuk meg, hogy a faágot teljes hosszában a téglalap megfelelő oldalára helyezzük. A szürke rész belső pontjait pedig megkaphatjuk például úgy, hogy az adott pontot összekötjük a téglalap legközelebbi csúcsával (ha több ilyen is van, akkor bármelyikkel), majd a kapott egyenesre helyezzük a faágot úgy, hogy a közepe az adott pont legyen. (Valójában a határpontokat is megkaphatjuk így.)

A negyedkörlapok körívtől különböző pontjaihoz nem található a faágnak ilyen állása. Ha ugyanis a faág közepét egy ilyen F pontba helyezzük, akkor a faág végeit A -val és B -vel, a körív középpontját (a téglalap csúcsát) P -vel jelölve a mellékelt ábra elrendezését kapjuk. Tudjuk, hogy egy háromszögben a nagyobb oldallal szemben nagyobb szög található. Így mivel $AF = 1 > PF$, ezért az AFP háromszögben (az ábra jelöléseit használva) $\gamma_1 > \alpha$. Hasonlóképpen a BFP háromszögben $BF = 1 > PF$, ezért $\gamma_2 > \beta$.

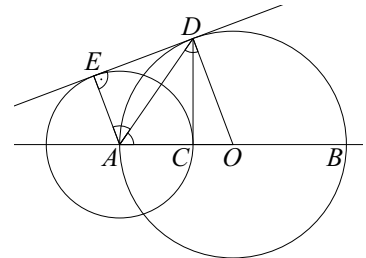


A két egyenlőtlenséget összeadva $\gamma_1 + \gamma_2 > \alpha + \beta$. De mivel az ABP háromszögben $\alpha + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 = 180^\circ$, ezért ebből $\gamma_1 + \gamma_2 > 90^\circ$ következne, ami lehetetlen, ha A és B az ábrának megfelelően az eredeti téglalap belsejében található.

Pontozás (összesen **max. 16 pont**):

- **3 pontot** ér az összekarcolható terület pontos meghatározása, ez a pontszám nem bontható.
- **3 pontot** ér a helyes ábra, ez a pontszám nem bontható.
- **4 pontot** ér annak indoklása, hogy a szürkített terület minden pontja összekarcolható, ez a pontszám arányosan bontható.
- **6 pontot** ér annak indoklása, hogy a negyedkörlapok körívtől különböző pontjai nem karcolhatók össze, ez a pontszám arányosan bontható.

10. osztály: Legyen a D -n áthaladó érintő és a második kör közös pontja E , az első kör középpontja pedig O . Az AOD háromszög egyenlő szárú (OD és OA sugarak ugyanabban a körben) (**1 pont**), ezért $ODA\angle = OAD\angle$ (**2 pont**). Mivel $OD \parallel AE$ (**2 pont**), így $DAE\angle = ODA\angle = OAD\angle$ (**2 pont**). Ebből következik, hogy a DEA és DCA háromszögek egybevágók (**3 pont**), hiszen megegyezik két oldaluk ($EA = AC$ sugarak, DA közös) és a közbezárt szögük: $DAE\angle = DAO\angle$ (**3 pont**). Ez azt jelenti, hogy $DCA\angle = DEA\angle = 90^\circ$ (**2 pont**), és így DC merőleges AB -re (**1 pont**). Bármilyen más helyes bizonyítást a leírtakkal arányosan kell pontozni (összesen **max. 16 pont**).

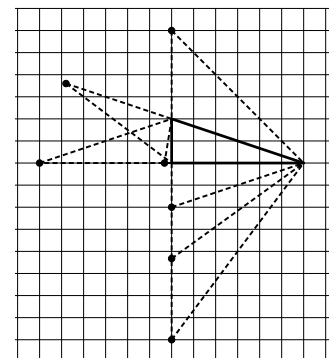


11. osztály: Az ábrán látható 7 különböző lehetőség létezik.

Pontozás:

- 1 jó lehetőség: **1 pont**
- 2 jó lehetőség: **3 pont**
- 3 jó lehetőség: **5 pont**
- 4 jó lehetőség: **7 pont**
- 5 jó lehetőség: **10 pont**
- 6 jó lehetőség: **13 pont**
- 7 jó lehetőség: **16 pont**

(Összesen **max. 16 pont**.)



12. osztály: Indirekt úton bizonyítunk (**2 pont**). Mivel $10 > 1$, ezért $\log_5 10 > 0$ (**2 pont**). Tegyük fel tehát, hogy lé-

teznek olyan p és q pozitív egész számok, amelyekre $\log_5 10 = \frac{p}{q}$ (**2 pont**). Azonban $\log_5 10 = \frac{p}{q} \Leftrightarrow q \cdot \log_5 10 = p$

$\Leftrightarrow 5^p = 10^q$ (**4 pont**). Ez utóbbi egyenlőség viszont nem lehet igaz, mivel 5^p utolsó számjegye 5, de 10^q utolsó számjegye 0 (**2 pont**). Ellentmondásra jutottunk, így feltevésünk hibás volt (**2 pont**). Vagyis nem léteznek olyan p és

q pozitív egész számok, amelyekre $\log_5 10 = \frac{p}{q}$, így $\log_5 10$ nem racionális szám (**2 pont**).

Más helyes gondolatmenet a fentiekkel arányosan pontozandó (összesen **max. 16 pont**).