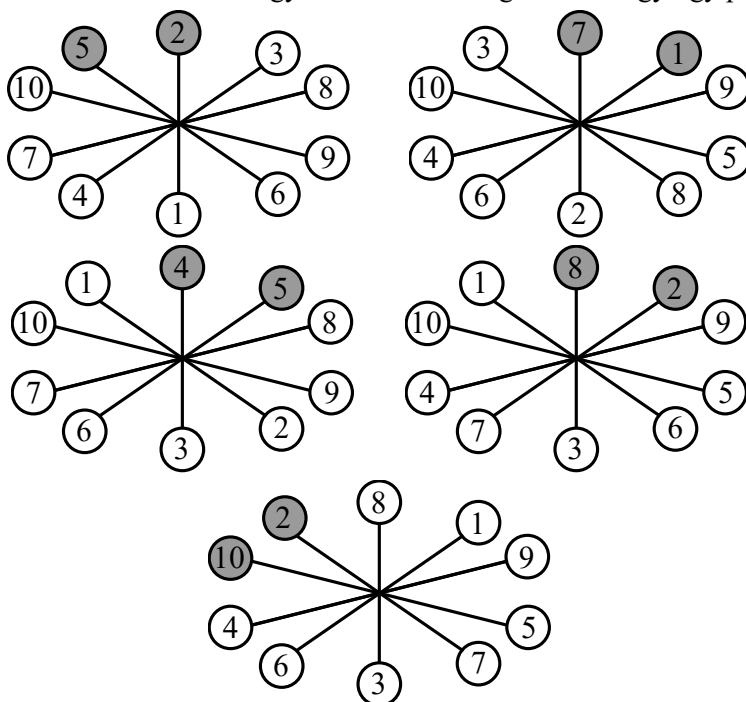


1. Írjátok az itt látható ábra 5 szakaszának körébe 1-től 10-ig az összes számot úgy, hogy minden két szomszédos körbe írt szám összege legyen egyenlő a szakaszok másik végein lévő két körbe írt szám összegével! Az alábbiakból mennyi lehet két ilyen szomszédos körbe írt szám összege? (Egy körbe csak egy szám írható!)

(A) 7                      (B) 8                      (C) 9                      (D) 10                      (E) 12

**Megoldás:** Megállapítható, hogy a 10 mellé nem kerülhet sem a 9, sem a 8, valamint az 1 mellé nem kerülhet sem a 2, sem a 3, mert nem volna mit tegyünk e két-két szakasz másik végére. Módszeres próbálkozással több megoldást találhatunk. Alább mindegyik válaszlehetőségre látunk egy-egy példát.

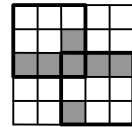


**Helyes válasz(ok): A, B, C, D, E**

2. Legkevesebb hány mezőt kell ahhoz befesteni egy  $5 \times 5$ -ös táblázaton, hogy minden  $3 \times 3$ -as részben pontosan 4 befestett mező legyen?

(A) 6                      (B) 7                      (C) 8                      (D) 9                      (E) 10

**Megoldás:** Az ábrán látható egy jó kifestés 7 festett mezővel. Ennyire szükség is van, ugyanis az ábrán vastagon jelölt két  $3 \times 3$ -as négyzetben egyaránt 4-4 festett mező van, így az egy közös mezőn kívül is kell lennie legalább 6 festett mezőnek.

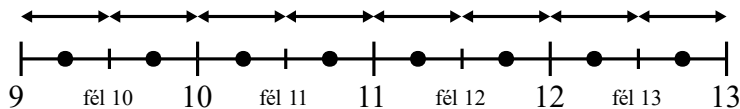


**Helyes válasz(ok): B**

3. Zsuzsi és barátói egy őszi napon elhatározták, hogy 9 órától 13 óráig megfigyelik a szomszéd szilvákertbe betévedt sünn viselkedését. A 4 órán át tartó megfigyelés minden pillanatában legalább egy lány szemmel tartotta a sünt. Mindegyik lány pontosan fél órán át figyelte folyamatosan, és mindegyikük arról számolt be, hogy megfigyelése alatt pontosan egy szem szilvát evett meg a falánk sünn. Hány szem szilvát fogyaszthatott el a sünn ezen a napon 9-től 13 óráig?

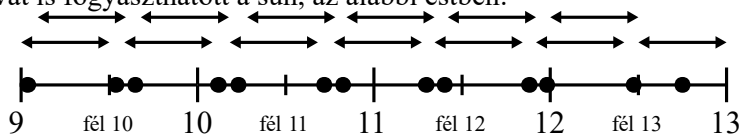
(A) 8                      (B) 9                      (C) 10                      (D) 11                      (E) 13

**Megoldás:** Ábránkon a 9 órától 13 óráig tartó időintervallumot daraboltuk fél órás időszakokra, és a kétirányú nyíl terjedelme jelöli egy gyerek megfigyelési időtartamát. A rajzon található pötty a szilva elfogyasztásának időpontját jelöli az időskálán. Amennyiben a gyerekek fél óránként egymást váltva figyelik a sünit,



akkor 8 szilvát fogyasztott összesen ebben a 4 órás időtartamban. Tehát (A) igaz.

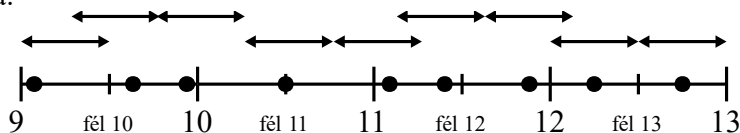
13 szilvát is fogyaszthatott a sünn, az alábbi esetben:



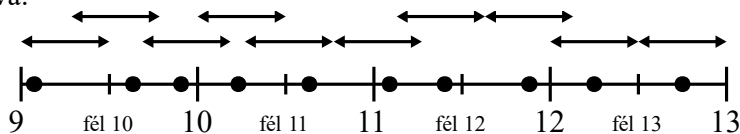
Tehát (E) is igaz.

9, 10 és 11 szilvát is fogyaszthatott, amint azt az alábbi elrendezésekben láthatjuk:

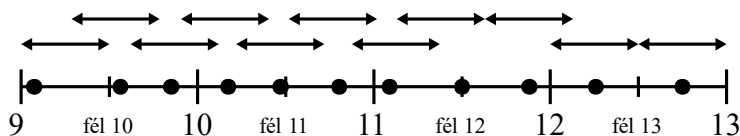
9 szilva:



10 szilva:

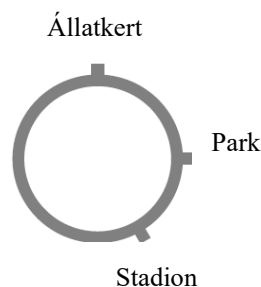


11 szilva:



Helyes válasz(ok): A, B, C, D, E

4. Csigali utcáin egyetlen villamosvonal található, mely kör alakot formáz. Az Állatkert megállótól a Park megállóig a Stadion megállón keresztül háromszor olyan hosszú utat tesz meg a villamos, mintha nem a Stadion megállón át menne ugyanoda. A Stadion megállótól az Állatkert megállóig viszont fele annyi utat tesz a villamos a Park megállón keresztül, mint ellentétes irányban. Hányszorosa a villamos útja a Park megállótól a Stadionok megállóig az Állatkerten át, mint ellenkező irányban?



(A) 6-szorosa (B) 8-szorosa (C) 9-szerese (D) 11-szerese (E) 12-szerese

**Megoldás:** Az Állatkert és a Park megállók közti út nem a Stadion megállón át negyede a teljes körnek, míg az Állatkert és Stadionok közti távolság a Park megállón át harmada a teljes körnek.

Így a Park és Stadion megállók közti távolság nem az Állatkert megállón át a teljes körnek

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12} - ed \text{ része és ez alapján az állatkerten át a teljes körnek}$$

az  $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} - ed$  részét teszi ki. Tehát a 11-szerese.

Helyes válasz(ok): D

5. Egy számítógépes program a következőképpen működik: amikor a képernyőn megjelenik egy szám, rá egy másodpercre új számot ír ki helyette, amit úgy kap, hogy a képernyőn lévő számhoz hozzáadja az utolsó számjegyénél 1-gyel nagyobb számot. Hány prímszám jelenhet meg ezen a képernyőn közvetlenül egymás után?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

**Megoldás:** Ha az első szám a 13, a következő  $13 + 4 = 17$ , így a 13–17 sorban 2 szám egymást követően is prím, de a 17 után a  $17 + 8 = 25$  jelenik meg, ami összetett szám.

Ha az első szám a 11, a következő  $11 + 2 = 13$ , a rákövetkező  $13 + 4 = 17$ , így a 11–13–17 sorban 3 egymást követő szám is prímszám, de a 17 után a  $17 + 8 = 25$  jelenik meg, ami összetett szám.

Ha az első szám az 5, akkor az  $5-11-13-17-25$  sorhoz jutunk, amiben 4 egymást követő prímszám jelenik meg a képernyőn.

Ha az első szám a 2, akkor a megjelenő számok sorrendben a  $2-5-11-13-17-25$ , így ekkor a 5 egymást követő prímszám jelenik meg a képernyőn.

Megmutatjuk, hogy maximum 5 egymást követő prímszám jelenhet meg a képernyőn. Mégpedig úgy, hogy belátjuk, hogy 6 egymást követően megjelent számból az egyik biztos összetett szám lesz.

Prímszámok csak 1, 3, 5, 7 vagy 9-re végződhetnek (5-re csak akkor, ha maga a szám is 5). Figyeljük meg mindegyik végződés esetén, hányasra végződnek a képernyőn megjelenő következő számok.

$$1-3-7-5$$

$$3-7-5$$

$$5-1-3-7-5$$

$$7-5$$

$$9-9-9-9-...$$

Nézzük meg konkrétan egy 9-re végződő prímszám esetén, hogyan következnek a számok.

Ha például 19 az első szám, akkor a következő  $19+10=29$ , aztán  $29+10=39$ , ... . Megfigyelhetjük, hogy tízesével követik egymást a számok. Mivel 10-nek 3-mal való osztási maradéka 1, ezért egy ilyen számsorban minden egymást követő három szám közül lesz egy, amelyik többszöröse 3-nak. Így egy ilyen sorban 2 vagy 3 szám után összetett számot kapunk.

Beláttuk tehát, hogy legkésőbb 5 megjelent szám után mindig lesz összetett szám ezen a képernyőn.

**Helyes válasz(ok): A, B, C, D**

6. Anna az  $\boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{4} \boxed{5}$  számkártyákból egyidőben kirakott egy háromjegyű és egy kétjegyű számot úgy, hogy a háromjegyű többszöröse lett a kétjegyűnek. Hányas számjegyet tartalmazó kerülhetett a háromjegyű számban az egyesek helyére?

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

**Megoldás:** Az összes lehetőséget végig próbálni igen hosszadalmas munka volna. Csökkenthető a lehetőségek száma, figyelembe véve, hogy a kétjegyű szám

- 15, 25, 35 vagy 45 nem lehet, mert ezek többszörösei 0-ra vagy 5-re végződnének (0-s kártya nincs, az 5-ös már fel lett használva);

- 24 vagy 42 nem lehet, mert ezek többszöröse páros (a többi kártyából csak páratlan számot lehet kirakni);

- 12, 32 vagy 52 nem lehet, mert ezek többszöröse 4-nek is többszöröse (a többi kártyából nem lehet 4 többszörösét kirakni);

- 54 nem lehet, mert ennek minden többszöröse osztható 9-cel (a többi szám-kártyából nem lehet 9 többszörösét kirakni).

Módszeres próbálkozással folytatva azt kapjuk, hogy 532 a 14-nek 38-szorosa, és 215 a 43-nak 5-szöröse. Így az Anna által kirakott háromjegyű számban az egyesek helyén lehetett 2 vagy 5 is.

**Helyes válasz(ok): B, E**

7. A Csirkeszárnyak étteremben 6 db-os, 9 db-os vagy 20 db-os csomagolásban rendelhetünk csirkeszárnyakat. (Így például kérhetünk 21 darabot, mert  $21 = 6 + 6 + 9$ , de semmilyen módon nem kaphatunk 19 darabot.) Mennyi az a legnagyobb csirkeszárny darabszám, amit nem tudunk itt rendelni?
- (A) 30-nál kevesebb.      (B) 30-nál több.      (C) 40-nél kevesebb.  
(D) 40-nél több.      (E) 46-nál kevesebb.

**Megoldás:** A megrendelt csirkeszárny darabszáma helyett ezentúl csak olyan egész számokról beszélünk, amelyek előállíthatók 6, 9 és 20 többszöröseinek összegeként.

A 6 és 9 többszöröseinek összegei a  $6a + 9b = 3(2a + 3b)$  alakú számok, ezek között minden  $3k$  ( $k \geq 2$ ) alakú szám előfordul, hiszen  $2a + 3b$  alakban az 1-nél nagyobb  $3r$ ,  $3r + 1$ ,  $3r + 2$  alakú számok egyaránt felírhatók.

Ezért a  $20 + 3k$  alakú számok  $k \geq 2$  esetén előállíthatók a kívánt módon, és ugyanez a  $40 + 3k$  alakú számokra is igaz. A 46-tól kezdve így minden szám előfordul, mert vagy többszöröse 3-nak, vagy ha  $20 + 3k$  alakú, akkor 3-mal osztva 2-t, míg ha  $40 + 3k$  alakú, akkor 3-mal osztva 1-et ad maradékul.

Kérdés, hogy 26 és 46 között sikerül-e minden számot előállítani? Azt állítjuk, hogy nem, a 43 kimarad, s ez egyben a legnagyobb olyan szám, amelyet nem írhatunk fel 6, 9 és 20 többszöröseinek összegeként. A 45 a 9 többszöröse, a  $20 + 3k$  alakú számok ( $k \geq 2$ ):

26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, ...,

míg a  $40 + 3k$  alakúak ( $k \geq 2$ ) 46-tal kezdődnek. A többi (hiányzó) szám vagy többszöröse 3-nak, vagy kisebb 43-nál.

A 43 valóban nem bontható fel a kívánt módon, mert ha 1 db 20-as szerepel benne, akkor  $43 = 20 + 23$ , de 23 nem szerepel a  $20 + 3k$  alakúak között  $k \geq 2$  miatt. Ha viszont 43-ban 2 db 20-as szerepel, akkor  $43 = 20 + 20 + 3$ , de 3 darabos csomag nincs.

Tehát a legnagyobb olyan darabszám, amit nem tudunk megrendelni, a 43.

**Helyes válasz(ok): B, D, E**

8. Hét törpe a talált gyémántokat úgy osztotta szét, hogy felváltva vettek belőle annyit, amennyi a még ott lévő gyémántok számában a számjegyek összege volt. Két teljes kör után a gyémántok elfogytak, ekkor egyikük kivételével mindenkinek ugyanannyi jutott. Hány gyémánt juthatott egy törpének?
- (A) 9      (B) 12      (C) 18      (D) 20      (E) 27

**Megoldás:** Tudjuk, hogy bármely számnak 9-cel való osztási maradéka ugyanaz, mint a számjegyei összegének 9-cel való osztási maradéka. Ezért, ha egy számból kivonjuk a számjegyei összegét, a különbség osztható lesz 9-cel.

Tehát miután az első törpe a talált gyémántokból elvett annyit, amennyi a számjegyek összege, az ott maradó gyémántok száma osztható lesz 9-cel. A 90-nél kisebb 9-cel osztható számok mindegyikére igaz, hogy a jegyek összege 9, így miután a gyémántok száma 90 alá kerül, mindegyik törpe 9 gyémántot fog elvenni. Tehát tudjuk, hogy az utolsó törpe utoljára 9 gyémántot kapott. 180-ig a 9 többszörösei közül egyedül a 99 az, amelyik számjegyeinek összege nem 9, hanem 18. Így amikor az osztozkodásnál kilencesével fogyni kezdenek a gyémántok, 99-re apadva, a soron következő törpe 18 gyémántot fog elvenni és ekkor 81-re apad a gyémántok száma, ahonnan újra kilencesével fogynak majd a gyémántok. Tehát egyetlen olyan törpe van, aki egyszer 9 és egyszer 18 gyémánthoz jut, a többi hat törpe mindkétszer 9 gyémántot kap, vagyis egy törpének 18 vagy 27 gyémánt juthatott.

**Megjegyzés:** Kiszámítható a gyémántok eredeti száma is. Legegyszerűbb, ha az osztozkodást a végéről göngyölítjük visszafelé, aszerint, hogy hány gyémánt volt egy lépéssel korábban: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 99, 108, 117, 126, 135. Így az is megállapítható, hogy az a törpe kapta a legtöbb gyémántot, amelyik ötödiknek vett.

**Helyes válasz(ok): C, E**

9. Egy  $3 \times 3$ -as táblázat mezőibe beírtuk az 1, 2, 3, ..., 9 számokat (mindegyikbe mást) úgy, hogy bármelyik  $2 \times 2$ -es részben lévő 4 számot adjuk is össze, mindig ugyanazt az összeget kapjuk. Mennyi lehet ez az összeg az alábbiak közül?

(A) 15                      (B) 16                      (C) 20                      (D) 24                      (E) 25

**Megoldás:** Jelölje  $a, b, c, d, e, f, g, h, i$  az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számok valamilyen sorrendjét, és helyezzük ezeket egy  $3 \times 3$ -as táblázat mezőibe ahogy az ábra mutatja. Ebben a táblázatban négy  $2 \times 2$ -es rész található:

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $d$ | $e$ | $f$ |
| $g$ | $h$ | $i$ |

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $d$ | $e$ | $f$ |
| $g$ | $h$ | $i$ |

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $d$ | $e$ | $f$ |
| $g$ | $h$ | $i$ |

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $d$ | $e$ | $f$ |
| $g$ | $h$ | $i$ |

Megmutatjuk, hogy sem 15, sem 25 nem lehet ez az összeg.

A 9 szám összege:  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ . Ha a négy szám összege lehetne 15, akkor a négy táblázat színezett mezőiben lévő négy szám összege

$$\begin{aligned}
 (a + b + d + e) + (b + c + e + f) + (d + e + g + h) + (e + f + h + i) &= 4 \cdot 15 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow a + b + c + d + e + f + g + h + i + 3e + b + d + h + f &= 60 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 45 + 3e + b + d + h + f = 60 \Leftrightarrow 3e + b + d + h + f &= 15
 \end{aligned}$$

Ez utóbbi egyenlőség viszont soha nem teljesülhet, mert  $3e + b + d + h + f$  értéke mindig több lesz 15-nél, hisz a legkisebb lehetséges értéke akkor keletkezik, ha  $e$  értéke 1, és  $b, d, h, f$  értékei valamilyen sorrendben a 2, 3, 4, 5, vagyis:

$$3e + b + d + h + f = 3 \cdot 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 17 > 15.$$

Ha a négy szám összege lehetne 25, akkor a négy táblázat színezett mezőiben lévő négy szám összege

$$\begin{aligned}(a+b+d+e) + (b+c+e+f) + (d+e+g+h) + (e+f+h+i) &= 4 \cdot 25 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a+b+c+d+e+f+g+h+i+3e+b+d+h+f &= 100 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 45+3e+b+d+h+f &= 100 \Leftrightarrow 3e+b+d+h+f=55\end{aligned}$$

Ez utóbbi egyenlőség viszont soha nem teljesülhet, mert  $3e+b+d+h+f$  értéke mindig kevesebb lesz 55-nél, hisz a legnagyobb lehetséges értéke akkor keletkezik, ha  $e$  értéke 9, és  $b, d, h, f$  értékei valamilyen sorrendben az 5, 6, 7, 8, vagyis:

$$3e+b+d+h+f = 3 \cdot 9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 53 < 55.$$

Tehát (A) és (E) hamis. A  $2 \times 2$ -es részekben a számok összege lehet 16, 20 vagy 24 is. Mindegyikre mutatunk egy-egy példát:

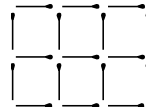
|   |   |   |
|---|---|---|
| 9 | 4 | 7 |
| 1 | 2 | 3 |
| 8 | 5 | 6 |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 8 | 5 | 2 |
| 3 | 4 | 9 |
| 7 | 6 | 1 |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 4 | 5 | 2 |
| 7 | 8 | 9 |
| 3 | 6 | 1 |

**Helyes válasz(ok): B, C, D**

10. Az ábrán egy 17 gyufaszázból készült  $2 \times 3$ -as téglalap látható. Hasonló módon 2007 gyufaszázból építettünk egy  $n \times k$  méretű téglalapot, amelynél mind a 2007 gyufaszálat felhasználtuk (egymásra nem helyezhettünk és szét sem törhettünk gyufaszálat). Mennyi lehet az  $n \times k$ -s téglalap hosszabb és rövidebb oldalát alkotó gyufák számának különbsége?



(A) 9                      (B) 18                      (C) 177                      (D) 354                      (E) 399

**Megoldás:** Egy  $n \times k$ -s téglalapban ( $n$  sor,  $k$  oszlop) a vízszintes és a függőleges gyufaszálok száma  $(n+1)k$  és  $n(k+1)$ , és így

$$(n+1)k + n(k+1) = 2007, \text{ azaz}$$

$$2nk + n + k = 2007.$$

Az egyenlet mindkét oldalát kettővel szorozva:

$$4nk + 2n + 2k = 4014, \text{ azaz}$$

$$(2n+1)(2k+1) = 4015.$$

Mivel  $4015 = 5 \cdot 11 \cdot 73$ , és  $2n+1 > 1$ ,  $2k+1 > 1$ , ezért  $(2n+1, 2k+1)$  a következő lehet:

$$(5, 803), (11, 365), (73, 55),$$

vagy fordítva. Tehát  $(n, k)$  lehet  $(2, 401), (5, 182), (36, 27)$ .

Ezekben az esetekben a két oldal különbsége rendre

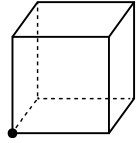
$$401 - 2 = 399,$$

$$182 - 5 = 177,$$

$$36 - 27 = 9.$$

**Helyes válasz(ok): A, C, E**

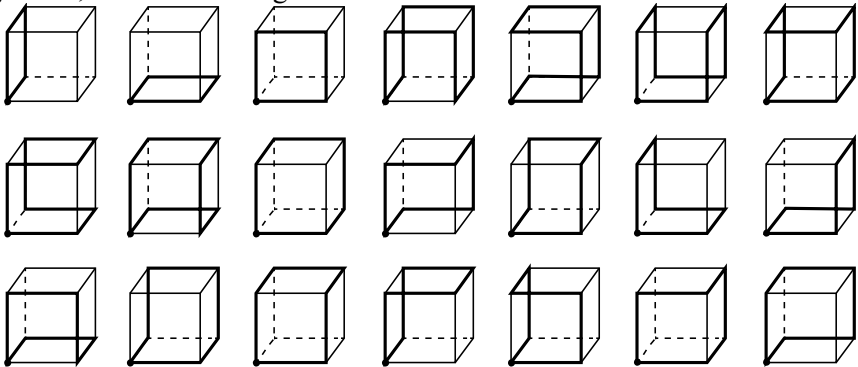
11. Legfeljebb hány olyan különböző utat találhatunk a mellékelt kocka élvázán, amely a megjelölt bal alsó csúsból indul, oda érkezik vissza és bármely élen legfeljebb egyszer halad át? (Két utat különbözőnek tekintünk, ha valamelyik csúcsot nem ugyanannyiadikként érintette.)



(A) 15      (B) 18      (C) 21      (D) 36      (E) 42

**Megoldás:** Mind a 8 csúsból páratlan számú él indul (3 él), ezért a jelölt csúcson kívüli csúcsok bármelyikébe egyszer érkezhetünk, és aztán onnan tovább kell haladnunk. Ha másodszor is érkezniénk egy adott csúcsba, akkor már csak olyan élen jöhetnénk el onnan, amilyen élen már korábban jártunk. Így a teljes élváz nem járható be. Ha menet közben egy négyzetlap bezárul, a fenti okok miatt már nem lehet továbbmenni.

Megrajzoljuk a lehetséges 21 útvonalat, ám ezek mindegyike mindkét irányba bejárható, ezért a lehetőségek száma 42.



**Helyes válasz(ok): E**

12. Legtöbb hány olyan háromjegyű prímszám létezik, amelyekben a számjegyek szorzata 189?

(A) 2      (B) 3      (C) 4      (D) 5      (E) 6

**Megoldás:** Bontuk a 189-et prímtényezőire és írjuk fel a pozitív osztóit:  $189 = 3^3 \cdot 7$ , az osztók: 1, 3, 7, 9, 21, 27, 63 és 189. Az osztók közül csak az egyjegyűek, azaz 1, 3, 7, 9 lehetnek számjegyek. Ezeket kell úgy megválasztani, hogy szorzatuk 189 legyen.

Az 1-es nem szerepelhet, mert akkor a másik két jegy szorzata legfeljebb  $9 \cdot 9 = 81$  lenne. A 9-es és 7-es pedig legfeljebb egyszer szerepelhet, mert sem a  $9 \cdot 9 = 81$ , sem a  $7 \cdot 7 = 49$  nem osztója 189-nek.

A háromjegyű szám jegyei tehát: 3, 7 és 9. A lehetséges háromjegyű számok: 379, 397, 739, 793, 937, 973.

Közülük 379, 397, 739, 937 prím, tehát összesen négy megfelelő szám létezik.

**Helyes válasz(ok): C**

13. Egy háromtétel zenemű szünet nélküli lejátszása 60 percig tart. Egyik tétel sem hosszabb, mint a másik két tétel együttvéve. Bármelyik két tétel hossza közti különbség legalább 3 perc. Hány perc időtartamú lehet az alábbiak közül a második leghosszabb tétel?

(A) 18      (B) 21      (C) 24      (D) 27      (E) 30

**Megoldás:** Ha a három tétel percben kifejezett hossza  $a < b < c$ , és ezek között a különbség páronként legalább 3, akkor  $a + 3 \leq b \leq c - 3$  és  $a + 3 + b + c - 3 = 60$  miatt  $a + 3$  legfeljebb 20, így  $a \leq 17$ .

Tudjuk, hogy  $b \leq c - 3$ , azaz  $3 \leq c - b$ . A  $c \leq a + b$  feltételből (egyik tétel sem hosszabb, mint a másik kettő együtt) viszont  $c - b \leq a$  következik, így  $3 \leq c - b \leq a$ , tehát  $3 \leq a$ , az előző eredménnyel együtt eszerint

$$3 \leq a \leq 17.$$

Be kell még látni, hogy ezek a szélsőértékek valóban határok, nemcsak korlátok, keresünk egy-egy példát mindkettőre:  $a = 17$ ,  $b = 20$ ,  $c = 23$ , illetve  $a = 3$ ,  $b = 27$ ,  $c = 30$ . (A példák egyébként a konstrukcióból azonnal adódnak.)

Tetszőleges  $3 \leq a \leq 17$  esetén  $b$  és  $c$  egy lehetséges értéke:  $b = \frac{57-a}{2}$ ,

$c = \frac{63-a}{2}$ . Így  $b$  értéke nem lehet 30. Lehet azonban  $b$  értéke 18, 21, 24

vagy 27, mégpedig akkor, ha a tételek percben mért hossza rendre:

(15, 18, 27), (15, 21, 24), (9, 24, 27), (3, 27, 30).

**Helyes válasz(ok): A, B, C, D**

14. Az alábbiak közül  $n$  mely értékére érhető el, hogy az  $A_n = \pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm n$  alakú összegek között szerepeljen a 100? (Bármelyik  $\pm$  helyett tetszés szerint választhatjuk a + vagy a – jelet.)

(A) 15      (B) 16      (C) 2020      (D) 2021      (E) 2022

**Megoldás:** Egy egész szám pontosan akkor páros, ha az ellentettje is az; így bármilyen előjelezés esetén a tagok, és így az egész összegnek is ugyanaz a paritása, mint az  $S_n = 1 + 2 + \dots + n$  összegé. Így, ha  $S_n$  páratlan, akkor a kívánt módon a 100-at nem lehet előállítani.

Vegyük észre, hogy

$$A_{15} = 1 + 2 + \dots + 9 - 10 + 11 + \dots + 15 = 100,$$

és

$$A_{16} = 1 + 2 + \dots + 7 - 8 + 9 - 10 + 11 + \dots + 16 = 100,$$

így (A) és (B) jó válasz.

Négy egymás után következő természetes szám előjelét mindig megválaszthatjuk úgy, hogy az összegük 0 legyen:

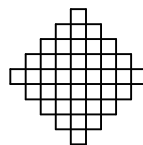
$$a - (a + 1) - (a + 2) + (a + 3) = 0.$$

Az  $A_{15}$  valamint  $A_{16}$  összegből kiindulva így az azonosság segítségével minden olyan  $n$ -re elő tudjuk állítani a 100-at, amely  $15 + 4k$  vagy  $16 + 4k$  alakú. A 15-től kezdve ezek éppen azok a számok, amelyekre  $S_n$  páros (tehát, ha  $n$  vagy  $n + 1$  osztható 4-gyel).

Mivel  $2020 = 16 + 4 \cdot 501$  és  $2023 = 15 + 4 \cdot 502$ , ezért nincs olyan  $k$  egész, amelyre  $15 + 4k$  vagy  $16 + 4k$  felvegye a 2021 vagy 2022 értéket. Így (C) jó válasz, de (D) és (E) nem.

**Helyes válasz(ok): A, B, C**

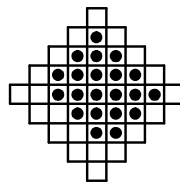
15. Legtöbb hányféleképpen lehet a  alakzatot a jobb oldali ábrában elhelyezni, ha az alakzatot forgatni szabad, de tükrözni nem? (Az alakzat vonalai az ábra rácsvonalaira kell illeszkedjenek!)



(A) 72                      (B) 76                      (C) 80                      (D) 84                      (E) 88

**Megoldás:** A nagy alakzat  $90^\circ$ -os forgási szimmetriája miatt elég a kis alakzatot az adott állásában elhelyezni a nagyban, és a lehetőségek számát megnégyesíteni, hiszen 4-féleképpen lehet elforgatni. A kis alakzat közepét egy

pöttyel megjelölve: , ez a középső mező az ábrán látható, pöttyös helyeken lehet. Ez 21 lehetőség, így a válasz 84.



**Helyes válasz(ok): D**