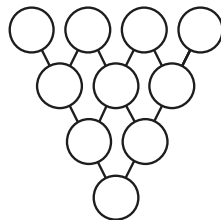
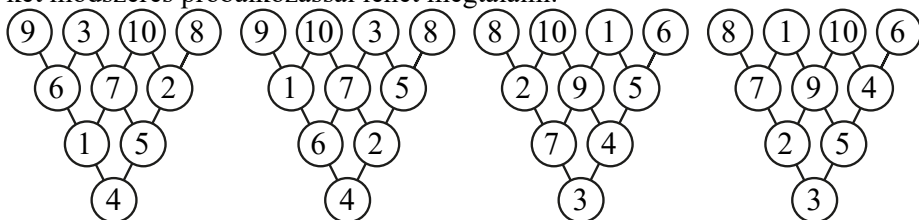


1. Peti elhelyezte az ábrán látható körökbe 1-től 10-ig az egész számokat úgy, hogy minden körben a közvetlenül felette lévő két szám különbsége állt. (Mindig a nagyobb számból vonjuk ki a kisebbet.) Mennyi lehetett a felső sorban lévő négy szám összege?



(A) 24 (B) 25 (C) 28 (D) 30 (E) 32

Megoldás: Az alábbi négy lényegileg különböző elhelyezés létezik, amelyeket módszeres próbálkozással lehet megtalálni.



Az első két esetben a kérdéses összeg $3 + 8 + 9 + 10 = 30$, az utolsó két esetben pedig $1 + 6 + 8 + 10 = 25$.

Helyes válasz(ok): B, D

2. Kati 21 egységkockából különböző méretekkkel rendelkező téglatesteket épített, az összes elem felhasználásával. Az alábbiakból összesen hány különböző tömör téglatestet építhetett? (Két téglatest különböző, ha térbeli forgatással nem vihetők át egymásba.)

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Megoldás: Az alábbiakban például az $1 \times 2 \times 6$ olyan 12 kockából épült téglatestet jelöl, amelynek az alapja 1 kockányi széles, 2 kockányi hosszú és 6 kockányi magas.

Mivel

$$21 = 1 \times 1 \times 5 + 1 \times 2 \times 8$$

$$21 = 1 \times 1 \times 5 + 1 \times 1 \times 8 + 1 \times 2 \times 4$$

$$21 = 1 \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 4 + 1 \times 2 \times 2 + 2 \times 2 \times 3$$

$$21 = 1 \times 1 \times 2 + 1 \times 1 \times 3 + 1 \times 2 \times 2 + 1 \times 1 \times 6 + 1 \times 2 \times 3$$

$$21 = 1 \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 2 + 1 \times 1 \times 3 + 1 \times 1 \times 4 + 1 \times 1 \times 5 + 1 \times 1 \times 6$$

így a 21 kocka maradéktalan felhasználásával Kati építhetett 2, 3, 4, 5 vagy 6 különböző téglatestet.

Helyes válasz(ok): A, B, C, D, E

3. Néhány bábu sorban áll egymás mellett. Mindegyik piros vagy zöld színű, és tudjuk, hogy mindkét szín előfordul. Ha két bábu olyan távol van egymástól, hogy közöttük 6 vagy 9 bábu van, akkor e két bábu színe azonos. Hány bábu állhat ebben a sorban?

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

Megoldás: Legfeljebb 15 bábu lehet. Tegyük fel ugyanis, hogy legalább 16 bábu van. Sorszámozzuk meg őket: 1., 2., 3., ... Két bábu között akkor van 6 illetve 9 bábu, ha a sorszámaik különbsége 7 illetve 10. Így az alábbi párok mind azonos színűek:

(1, 8), (8, 15), (15, 5), (5, 12), (12, 2), (2, 9), (9, 16), (16, 6), (6, 13), (13, 3), (3, 10) továbbá az

(1, 11), (11, 4), (4, 14), (14, 7)

párok is, így az

1, 8, 15, 5, 12, 2, 9, 16, 6, 13, 3, 10 és a 11, 4, 14, 7

bábuk azonos színűek.

Tehát az első 16 bábu azonos színű, ezért minden bábu azonos színű, ami ellentmond a feltételeknek.

Az előbbi gondolatmenethez hasonlóan lehet rájönni a 15 bábu esetén szükséges elrendezésre: a 3, 6, 10, 13, 16 bábuk zöldek, a többi bábu piros. A sor végéről elhagyhatunk bábukat, így a helyes válaszok a 13, 14, 15.

Helyes válasz(ok): A, B, C

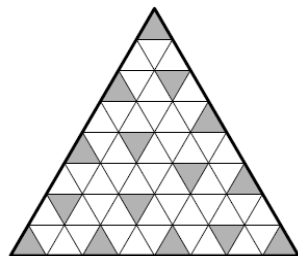
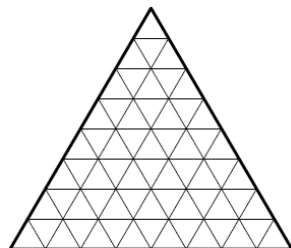
4. A szabályos (egyenlőoldalú) háromszög oldalait 8 egyenlő részre osztottuk, majd ezeken keresztül az ábrán látható módon rácsháromszögekre osztottuk az eredeti háromszöget. Hány kis háromszöget sötétre színezve valósul meg, hogy mindegyik metszéspont (beleértve a nagy háromszög oldalain lévőket is) valamelyik beszínezett háromszög csúcsa legyen?

(A) 12 (B) 14 (C) 15 (D) 17 (E) 18

Megoldás: A metszéspontok száma:

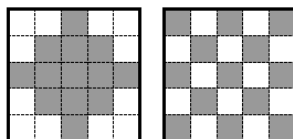
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

Minden háromszögnek 3 csúcsa van, így legalább $45 : 3 = 15$ háromszöget be kell színezni. Jobbra egy példát láthatunk 15 háromszög feltételeknek megfelelő színezésére. Nyilvánvaló, hogy még több háromszög színezésével még könnyebben célt érhetünk.



Helyes válasz(ok): C, D, E

5. A balra látható ábrán egy lépésben helyet cserélhet egymással két sor vagy két oszlop. Az alábbiak közül összesen hány ilyen lépéssel juthatunk el a baloldali ábrából a jobboldalihoz?



- (A) 10 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) Az előzőek egyikével sem.

Megoldás: A bal oldali ábrán létezik egy oszlop és egy sor is, amelynek minden mezője sötét. Bárhogy is cserélünk fel egymással két sort vagy két oszlopot mindig lesz egy olyan oszlop, amelyben mind az 5 mező sötét lesz. Ilyen a jobboldali ábrán nincs, tehát az soha nem alakulhat ki belőle.

Helyes válasz(ok): E

6. Egy öt fordulóból álló futóverseny-sorozaton 50 induló vett részt. Bandi minden egyes fordulóban a 10. helyen végzett. A verseny végeredményét az egyes fordulókban elért időeredmények összeadásával határozzák meg. Az összetett versenyben az alábbiak közül Bandi hányadik helyen végezhetett?

- (A) 1. (B) 10. (C) 25. (D) 47. (E) 50.

Megoldás: Tegyük fel, hogy Bandi mind az 5 fordulóban 30 perc alatt futotta le a távot. Akik előtte voltak, azoknak az ideje mindig 30 percnél rövidebb volt. Ha minden fordulóban teljesen más versenyzők végeztek az első kilenc helyen, akkor összesen 45 versenyző előzte meg valamikor Bandit, mindegyikük pontosan egyszer. Szemeljünk ki közülük egyet; ha az az idő, amennyivel ez a versenyző négy forduló alatt összesen lemaradt Banditól, több, mint amennyivel egyszer megelőzte őt, akkor időeredményének összege nagyobb, mint Bandié. Így Bandi a rangsorban megelőzi őt. Ezt mind a 45 versenyzőre elmondhatjuk. A maradék 4 versenyző időeredményének összege pedig biztosan nagyobb Bandi időeredményének összegénél. Bandi tehát lehetett első, így (A) jó válasz.

Előfordulhatott az is, hogy minden fordulóban mindenki ugyanazon a helyen végzett. Ekkor Bandi 10. lett, így (B) is jó válasz.

Bandi lehetett a 25. is, például a következőképpen. 24 versenyzőnek lehetett kétszer is 30 percnél rövidebb az ideje. Vizsgáljunk meg közülük egyet; ha az az idő, amennyivel ez a versenyző három forduló alatt összesen lemaradt Banditól, kevesebb, mint amennyivel kétszer megelőzte őt, akkor időeredményének összege kevesebb, mint Bandié. Így Bandi a rangsorban mögött van ennek, vagyis ekkor ez a 24 versenyző Bandi előtt végzett. A többiekkel pedig előfordulhatott, hogy amennyivel az összesen lemaradt Banditól, több, mint amennyivel megelőzte őt (ha volt ilyen), így ekkor időeredményének összege nagyobb, mint Bandié. Így Bandi a rangsorban megelőzi őt. Tehát (C) is jó válasz.

Bandi nem végezhetett sem a 47., sem az utolsó helyen. Aki mind az 5 fordulóban Bandi mögött végzett, az nyilván nem előzheti meg Bandit az összetett versenyben. Ilyen versenyző pedig biztosan volt, mert legfeljebb 45 versenyző

végzett legalább egyszer Bandi előtt, a többiek, legalább négyen mindig utána. Tehát (D) és (E) nem jó válasz.

Helyes válasz(ok): A, B, C

7. A Vitkó tanyán nagyon sok kutya van, közülük több a harapós, mint a nem harapós. Egy teljes héten az egyik harapós kutya minden nap egyszer megharapta a többi harapós kutyát, és kétnaponta mindegyik harapós kutya ugyanazon órán belül egyszer megharapott minden nem harapós kutyát, más harapás nem volt, így e héten 533 harapás történt. Összesen mennyi kutya lehetett ezen a héten a Vitkó tanyán, ha a kutyák száma hét közben nem változott?

- (A) 10 és 20 között (B) 20 és 30 között (C) 30 és 40 között
(D) 40 és 50 között (E) 50 és 60 között

Megoldás: Legyen a nem harapós kutyák száma a , és a harapós kutyák száma b , $a < b$. A harapós kutyák naponta összesen $b-1$ harapást kaptak, így egy héten át $7(b-1)$ harapás érte őket, míg a nem harapós kutyák a szerint, hogy a hét első vagy második napján érte őket először a harapás, egy héten át $3ab$ vagy $4ab$ harapást kaptak. Így

$$7(b-1) + 3ab = 533 \quad \text{vagy} \quad 7(b-1) + 4ab = 533.$$

Rendezve ezeket az egyenleteket

$$b(3a+7) = 540 \quad \text{vagy} \quad b(4a+7) = 540$$

Innen többféle úton is folytathatjuk a megoldást.

Egyik lehetőség például, hogy módszeresen végig próbáljuk mindkét egyenlőség esetén a helyére beírva az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, számokat megnézve, hogy melyik esetben lesz b értéke pozitív egész, figyelve arra, hogy a nem lehet nagyobb b -nél. Ekkor az első egyenlőségnek csak az $a=1$, $b=54$, a másodiknak pedig az $a=2$, $b=36$ valamint $a=5$, $b=20$ felel meg, vagyis a kutyák $a+b$ száma a tanyán lehetett 25, 38 vagy 55.

A folytatás lehetett volna úgy is, hogy prímtenyezős alakba írjuk az 540-et: $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$, majd ezt az összes lehetséges kéttényezős szorzatra bontjuk (figyelembe véve, hogy $a < b$) melyből az egyik tényező $3a+7$ vagy $4a+7$, ahonnan meghatározhatjuk a -t, és megkapjuk b -t is.

Helyes válasz(ok): B, C, E

8. Anna gondolt 5 számot, és Beának megmondta mindegyik összeget, amelyeket két-két szám összeadásával kapott. Ezek a következők: 6, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 11, 12. Az alábbiak közül melyik számra gondolt Anna?

- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{7}{2}$ (D) $\frac{11}{2}$ (E) 7

Megoldás: Legyenek a gondolt számok $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$. Ha valamennyi kéttagú összeget összeadjuk, azt kapjuk, hogy

$$4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 90,$$

azaz a számok összege

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \frac{45}{2} \quad (1)$$

A számok rendezése miatt $x_1 + x_2 = 6$ a legkisebb összeg, és

$$x_4 + x_5 = 12 \quad (2)$$

a legnagyobb. (1)-gyel összevetve adódik, hogy

$$x_3 = \frac{45}{2} - (x_1 + x_2) - (x_4 + x_5) = \frac{9}{2}.$$

Mivel $x_3 + x_4 \leq x_3 + x_5 \leq x_4 + x_5$, ezért az utolsó előtti legnagyobb összeg

$x_3 + x_5 = 11$, innen, mivel $x_3 = \frac{9}{2}$, az $x_5 = \frac{13}{2}$, (2)-ből pedig:

$$x_4 = 12 - \frac{13}{2} = \frac{11}{2}.$$

Végül $x_1 + x_2 = 6$ és $x_1 + x_3 = 7$ a következő legkisebb összeg, ahonnan

$$x_1 = 7 - x_3 = 7 - \frac{9}{2} = \frac{5}{2} \text{ és } x_2 = 6 - \frac{5}{2} = \frac{7}{2}.$$

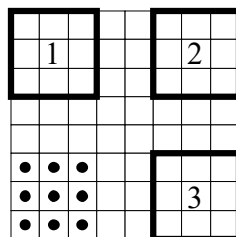
A gondolt számok tehát nagyság szerint: $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{11}{2}$ és $\frac{13}{2}$.

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy valamennyi felsorolt kéttagú összeg előfordul, hiszen $x_1 + x_2 = 6$, $x_1 + x_3 = 7$, $x_1 + x_4 = 8$, $x_1 + x_5 = 9$, $x_2 + x_3 = 8$, $x_2 + x_4 = 9$, $x_2 + x_5 = 10$, $x_3 + x_4 = 10$, $x_3 + x_5 = 11$ és $x_4 + x_5 = 12$.

Helyes válasz(ok): C, D

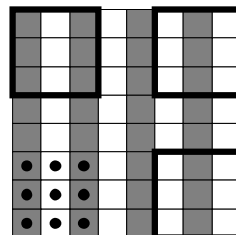
9. A 8×8 -as négyzetrács bal alsó sarkában az ábrán látható módon a 3×3 -as rész minden mezőjében egy-egy korong található. Egy lépésben egy korong bárholnan átugorhat egy másikat és arra a mezőre érkezik, amelyik tükörképe az eredeti mezőjének az átugrottra nézve. Az alábbiak közül melyik az az ábrán számokkal jelölt 3×3 -as rész, amelyiknek a kilenc mezőjébe juthat ilyen lépésekkel ez a kilenc korong?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) egyik sem (E) mindhárom



Megoldás: Színezzük be minden második oszlopot az ábránkon látható módon.

Észrevehető, hogy minden korong minden lépésben ugyanolyan színű mezőre kerül, mint amilyen színű mezőn előtte volt. Induláskor 6 korong volt sötét és 3 korong világos mezőn, ám a 2-es és 3-as részben egyaránt 3 sötét és 6 világos mező található a kijelölt 3×3 -as részben.



Hasonló következtetésre jutunk, ha az oszlopok helyett minden második vízszintes sort színezzük sötétre, így az 1-es rész kilenc mezőjébe sem juthatnak el a korongok.

Helyes válasz(ok): D

10. Az alábbiakból melyik válaszlehetőséggel fejezhető be a következő mondat úgy, hogy az igaz legyen? Bárhogy is adunk kilenc olyan különböző pozitív egészet, amelyek összege 200, közülük mindenképpen kiválasztható négy, melyek összege nagyobb, mint ...

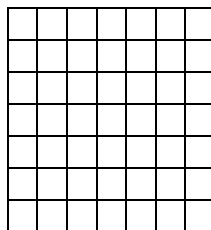
(A) 96 (B) 99 (C) 100 (D) 101 (E) 103

Megoldás: Tekintsük a következő kilenc számot: 28, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18. Az összeg 200, de közülük a négy legnagyobb összege $28 + 25 + 24 + 23 = 100$. Tehát a kilenc szám közül bármely négynek az összege nem több, mint 100, így nyilván (C) válasz mellett, (D) és (E) sem helyes válasz. Hasonló példa: 27, 26, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18. Ha a hét legkisebb nem a 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18, hanem közülük valamelyik kisebb, akkor a két legnagyobb közül, vagyis 28, 25 illetve 27, 26 közül valamelyiknek nagyobbak kell lennie ezekről, így pedig a négy legnagyobb összege biztosan legalább $23 + 24 + 25 + 28 = 100$, illetve $23 + 24 + 26 + 27 = 100$, ami nagyobb mint 99 és még inkább nagyobb mint 96.

Helyes válasz(ok): A, B

11. Írjátok a 7×7 -es négyzetrács mezőibe az 1, 2, 3, 4 számokat úgy, hogy bármely 2×2 -es részben mindegyik számból pontosan egy legyen. Az alábbiakból összesen hány 1-est írhattok így a 7×7 -es négyzetrácsba? (Minden mezőbe egy szám kerülhet!)

(A) 8 (B) 10 (C) 13 (D) 15 (E) 17



Megoldás: Amint az alábbi négyzetrácsokban látható, az 1-esek száma összesen 10, 13, vagy 15 lehetett.

4	3	4	3	4	3	4
2	1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	4	3
2	1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1
4	3	4	3	4	3	4

10

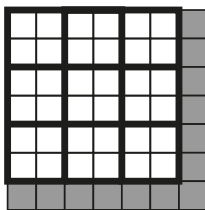
2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1
3	4	3	4	3	4	3
2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3
2	1	2	1	2	1	2

13

1	2	1	2	1	2	1
3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1
3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1
3	4	3	4	3	4	3
2	1	2	1	2	1	2

15

Most megmutatjuk, hogy 8 és 17 nem lehet. Figyeljük meg ehhez az alábbi ábrát:



Ebben a 9 darab 2×2 -es világos rész mindegyikében kell lennie egy 1-esnek, tehát legalább kilenc 1-es lesz a 7×7 -es négyzetrácsban.

A színezett mezőkbe, mivel két szomszédosba nem kerülhet 1-es, ezekbe legfeljebb hét 1-es kerülhet, tehát a 7×7 -es négyzetrácsba legfeljebb $9 + 7 = 16$ darab 1-es lehet.

Helyes válasz(ok): B, C, D

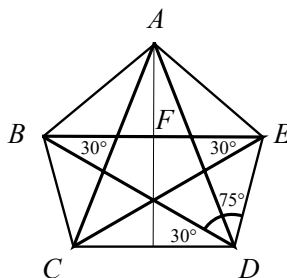
12. Jancsi egy olyan ötszöget rajzolt, amelynek összes belső szöge kisebb volt 180° -nál és minden átlója egyforma hosszú. Az alábbiakból melyik válaszlehetőséggel fejezhető be a következő mondat úgy, hogy az igaz legyen? Ennek az ötszögnek valamelyik belső szöge lehetett ...

(A) 105° -os (B) 107° -os (C) 108° -os (D) 109° -os (E) 110° -os

Megoldás: Az ötszög lehetett szabályos, ekkor mindegyik szög 108° -os, tehát (C) jó válasz.

Megmutatjuk, hogy rajzolhatott olyan ötszöget is, amely nem szabályos, például, amelyiknek egyik szöge 105° -os és átlói mégis egyforma hosszúak.

Tekintsük ehhez a következő $ABCDE$ ötszöget: Legyen $BECA$ és $BEDA$ két egyenlő szárú háromszög 30° -os szárszöggel úgy, hogy $CE = EB = BD$ teljesüljön. Az A csúcsot választjuk a CD szakasz felezőmerőlegesén annak a pontnak, amelyre $BE = AC = AD$.



A $BCDE$ négyszög szimmetrikus trapéz, ezért $CDB\hat{=} = 30^\circ$, és tudjuk, hogy $BDE\hat{=} = 75^\circ$. Így a kapott konvex ötszög D csúcsánál levő szöge 105° -os, tehát az nem szabályos.

(A megadott ötszög valóban konvex; ehhez elegendő megjegyeznünk, hogy CD felezőmerőlegesének bármely, a $BCDE$ trapéz belsejében lévő pontjának C -től való távolsága legfeljebb CF . Mivel pedig CF a CBE háromszög súlyvonala, ezért kisebb a CE és CB szakaszok számtani közepénél, így azok nagyobbikánál, CE -nél is. Az A pont tehát a $BCDE$ négyszögon kívül fekszik.) Amennyiben a kezdeti egyenlőszárú háromszögek szárszögei 30° helyett 36° , 38° , 40° -nak választjuk, akkor a CDE mértéke rendre 107° , 109° , 110° lesz. Ezekről ellenőrzéssel könnyen meggyőződhetünk.

Helyes válasz(ok): A, B, C, D, E

13. Baloldalt egy sáska, középen egy szöcske, jobboldalt egy tücsök ül egy hosszú, egyenes árokban. Jelöljük ezt az állapotot balról jobbra a megfelelő szavak kezdőbetűivel: (S, SZ, T). Időnként valamelyik átugorja egyik szomszédját. 2021 ugrás után az alábbiakból melyik sorrendben ülhetnek újra egymás mellett, ha végig csak az árokban (egy egyenes mentén) a leírtak szerint ugrálnak?

(A) (S, SZ, T) (B) (T, SZ, S) (C) (SZ, T, S) (D) (S, T, SZ) (E) (SZ, S, T)

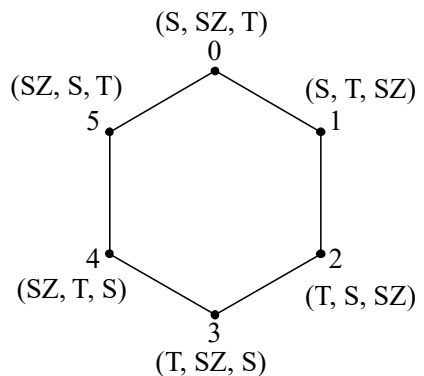
Első megoldás: A sáska (S), a szöcske (SZ) és a tücsök (T) összesen hatféle elrendezésben ülhetnek egymás mellett, és minden ugrásnál a középső kicserélődik. Az alábbi ábra 6 csúcsát a 6 elrendezésnek feleltettük meg, és két csúcsot akkor kötöttünk össze, ha az egyikből 1 ugrással el lehet jutni a másikhoz, és viszont.

A csúcsokat a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számokkal az ábra szerint megszámoztuk.

2021 ugrással pontosan akkor lehet eljutni valamelyik sorrendhez, ha az ábra 0 pontjából a vonalakon lépegetve 2021 lépés után visszajuthatunk a kérdéses pontba.

Minden lépésnél páros sorszámú csúcsból páratlanba vagy páratlanból párosba lépünk, így 2021 lépés után csak páratlan sorszámú pontba léphetünk. Mivel szabad a vázolt állapotokon oda-vissza is mozogni, ezért bármelyik páratlan sorszámú pontba léphetünk a 2021. lépésben.

Második megoldás: Nevezzük A állapotnak az előző megoldás jelöléseit használva a következő 3 esetet: (S, SZ, T), (T, S, SZ), (SZ, T, S), B állapotnak pedig a többi 3 elrendezést: (S, T, SZ), (T, SZ, S), (SZ, S, T). Minden ugrás után az A állapotból a B -be, B -ből pedig az A -ba jutunk. Így 2021 lépés után A -ból kiindulva B -be kell jutnunk.



Helyes válasz(ok): B, D, E

14. Öreg falióránk számlapjáról leesett az összes szám. Bárhogyan összekeverve tesszük is vissza a tizenkét számot, lesz közöttük három egymás melletti, amelyek összege legalább x . Mennyi lehet x , hogy az előző mondat igaz legyen?

(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 21 (E) 22

Megoldás: Legyen a tizenkét szám ebben a sorrendben $a_1, a_2, \dots, a_{12}$, az egymás melletti számhármaskok összege pedig $S_1 = a_{12} + a_1 + a_2$,

$$S_2 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_{12} = a_{11} + a_{12} + a_1.$$

Ezek összege,

$$S_1 + S_2 + \dots + S_{12} = 3(a_1 + a_2 + \dots + a_{12}) = 234.$$

Az S_i összegek átlaga így 19,5, van tehát köztük legalább ekkora. Másfelől ezek az összegek egész számok, azért valóban van köztük olyan, amelyiknek legalább 20 az értéke.

Azt állítjuk, hogy az S_i összegek között van 20-nál nagyobb is.

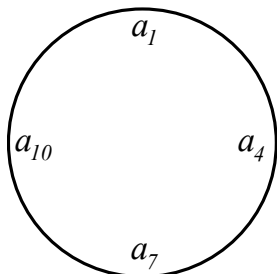
Tegyük fel, hogy ez nem igaz, a 12 szám elrendezhető úgy, hogy ne legyen 20-nál nagyobb S_i összeg. Ha hatnál kevesebb 20 értékű S_i összeg volna, akkor a tizenkét összeg összege legfeljebb $5 \cdot 20 + 7 \cdot 19 = 233$ lenne, ami lehetetlen. A 20 értékű összegek száma így legalább 6. Ha 7 vagy ennél is több ilyen összeg van, akkor van köztük két szomszédos, azaz

$$S_i = a_{i-1} + a_i + a_{i+1} = S_{i+1} = a_i + a_{i+1} + a_{i+2} = 20.$$

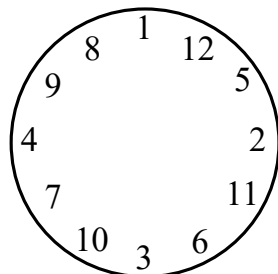
Szomszédos összegek értéke viszont egyáltalán nem lehet egyenlő, hiszen ebből $a_{i-1} = a_{i+2}$ következne.

Ha pontosan 6 maximális összeg van, akkor ahhoz, hogy 234 legyen a 12 számhármaskok összegének az összege, a további 6 számhármaskok mindegyikének összege 19 kell legyen.

A szomszédos összegek között nincsenek egyenlők, így a 12 számhármaskban felváltva követik egymást a 19 és a 20 értékű összegek. Megmutatjuk, hogy ez nem lehetséges, feltétlenül van két szomszédos összeg, amelyek eltérése nagyobb, mint 1.



1. ábra



2. ábra

Tekintsük ehhez az a_1, a_4, a_7, a_{10} számokat (1. ábra). E négy szám különböző, így van köztük az adott körüljárás szerint szomszédos kettő, amelyek el-

térése legalább 2. Például $|a_4 - a_7| \geq 2$. Ez az eltérés viszont nem más, mint $|S_5 - S_6| = |a_4 + a_5 + a_6 - (a_5 + a_6 + a_7)|$. E két szomszédos összeg eltérése így legalább 2, ami ellentmond a korábbiakban talált egyedül lehetséges elrendezésnek. Nem lehetséges tehát, hogy az S_i összegek maximuma 20 legyen, van olyan összeg, amelyik legalább 21. A 2. ábrán látható elrendezésben az S_i összegek maximuma éppen 21, eredményünk ezért tovább nem javítható.

Helyes válasz(ok): A, B, C, D

15. Van egy kétkarú mérlegünk és 12 egyforma nagyságú, különböző színű golyónk. Közülük egy más fajsúlyú anyagból készült, mint a többi. Az alábbiakból hány méréssel állapítható meg biztosan, hogy melyik ez a golyó, és hogy nehezebb, vagy könnyebb-e a többinél?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Megoldás: Nyilvánvaló, hogy két mérés kevés a kérdés eldöntéséhez.

Hívjuk a - könnyebb vagy nehezebb - golyót hamisnak. Megmutatjuk, hogyan lehet 3 méréssel biztosan megállapítani melyik a hamis és hogy az könnyebb vagy nehezebb a többinél. A golyók színére vonatkozó feltétel azt jelenti, hogy meg tudjuk őket különböztetni, és a mérések során bármelyik golyót nyomon tudjuk követni. Hívjuk golyók egy csoportját gyanúsnak, ha közöttük lehet a hamis golyó, egyébként pedig hívjuk a csoportot jónak.

Osszuk a golyókat három csoportba, mindegyikükben 4-4 golyóval.

I. A_1, A_2, A_3, A_4 ;

II. B_1, B_2, B_3, B_4 ;

III. C_1, C_2, C_3, C_4 ;

Mérjük össze az I. és a II. csoportot.

Ha egyenlőség van, akkor a III. csoport gyanús, az első kettő pedig jó. Tegyük most az egyik serpenyőbe 3 gyanús (C_1, C_2, C_3), a másikba pedig 3 jó golyót. Ha ismét egyenlőség van, akkor e hat golyó is jó, az egyetlen megmaradt gyanús golyó (C_4) a hamis, és azt, hogy könnyebb vagy nehezebb a többinél, egyetlen további méréssel el tudjuk dönteni.

Ha a második mérésnél nincs egyenlőség, akkor a három gyanús golyó, C_1, C_2, C_3 között van a hamis, és azt is tudjuk, hogy könnyebb-e, mint a többi, vagy nehezebb (föltehető, hogy könnyebb). Ekkor pedig egyetlen további méréssel mindent megtudhatunk, ha két gyanús golyót összehasonlítunk. Ha nincs egyensúly, akkor a könnyebbik, ha pedig egyensúlyban vannak, akkor a harmadik golyó a hamis - és persze könnyebb a többinél.

Nézzük most azt az esetet, ha az első mérésnél nincs egyensúly, az I. csoportban lévő golyók összsúlya például nagyobb.

Ekkor az első mérés után van 4 gyanús nehéz golyónk (A_1, A_2, A_3, A_4), négy gyanús könnyű (B_1, B_2, B_3, B_4) és négy jó golyónk (C_1, C_2, C_3, C_4).

Tegyünk most mindkét serpenyőbe két nehéz és egy könnyű gyanús golyót, azaz mérjük össze az (A_1, A_2, B_1) és az (A_3, A_4, B_2) csoportokat. Ha egyenlőség van, akkor ez a 6 golyó jó, a hamis golyó a megmaradt két könnyű gyanús, B_3 és B_4 között van. Ezek egyikét egy jó golyóval összemérve eldönthető, melyikük a hamis. (Azt már tudjuk, hogy könnyebb a többinél.)

Az az eset maradt, ha a második mérés után a két vegyes csoport nincs egyensúlyban, például (A_1, A_2, B_1) nehezebb, mint (A_3, A_4, B_2) . Ez kétféleképpen lehetséges: vagy a két nehéz, A_1 és A_2 között van a hamis (és nehezebb a többinél), vagy maga a könnyű B_2 a hamis, és persze könnyebb a többinél.

Hasonlítsuk ezért össze A_1 -et és A_2 -t, a két nehéz gyanús golyót.

Ha egyensúly van, akkor a könnyű B_2 a hamis, ha pedig nincsen, akkor tudjuk, hogy a hamis golyó a nehezek között van, és így a két golyó, A_1 és A_2 közül a nehezebb a hamis.

Ezzel minden esetet megvizsgáltunk, és valóban mindig el tudtuk dönteni, melyik a hamis golyó; és azt is, hogy könnyebb vagy nehezebb a többinél.

Nyilvánvaló, hogy 3-nál több méréssel még inkább biztosan eldönthető, hogy melyik a hamis és hogy az könnyebb vagy nehezebb a többinél.

Helyes válasz(ok): C, D, E