5. osztály

1. Egy dobozban 10 számkártya volt az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokkal. Anna, Bori, Cili, Dóri és Eta egymás után 2-2 kártyát húzott. Négyen elárulták a húzott számok összegét: Anna 7-et, Bori 12-t, Cili 9-et, Dóri 15-öt mondott. Az alábbiak közül melyik lehetett az Eta által húzott számok között?

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *7* **(E)** *9*

Megoldás: Mivel a 10 számkártyán a számok összege 55, így Eta számainak összege $55-(7+12+9+15)=12$ volt. Ez nem állhat elő két olyan szám összegeként, amelyek között az 1 is szerepel, tehát (A) biztosan hibás válasz.

A másik négy válaszlehetőség viszont megvalósulhat, például a következő módon:

Anna	Bori	Cili	Dóri	Eta
1, 6	3, 9	4, 5	7, 8	**2**, 10
1, 6	2, 10	4, 5	7, 8	**3**, **9**
3, 4	2, 10	1, 8	6, 9	5, **7**

Tehát 2, 3, 7, illetve 9 is lehetett Eta számai között.

Helyes válasz(ok): B, C, D, E

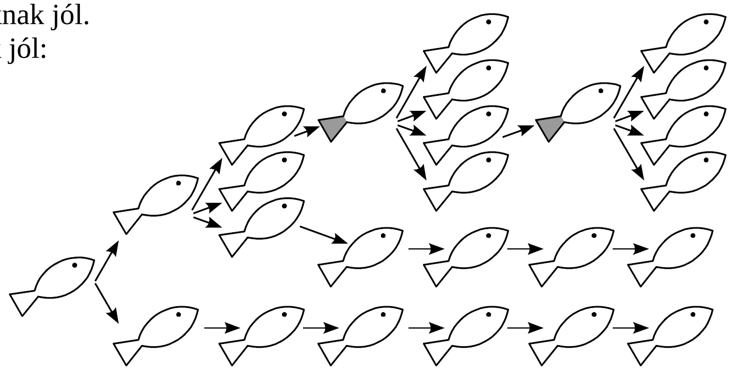
2. Egy üres tóban szabadon engedünk 25 éhes csukát, amelyek rövid időn belül elkezdik felfalni egymást. Egy csukát jóllakottnak nevezünk, és így több halat már nem fogyaszt, ha megevett 4 másik (éhes vagy jóllakott) csukát. A 25 csuka közül hány lakhat jól élete során ebben a tóban?

(A) *0* **(B)** *2* **(C)** *4* **(D)** *6* **(E)** *8*

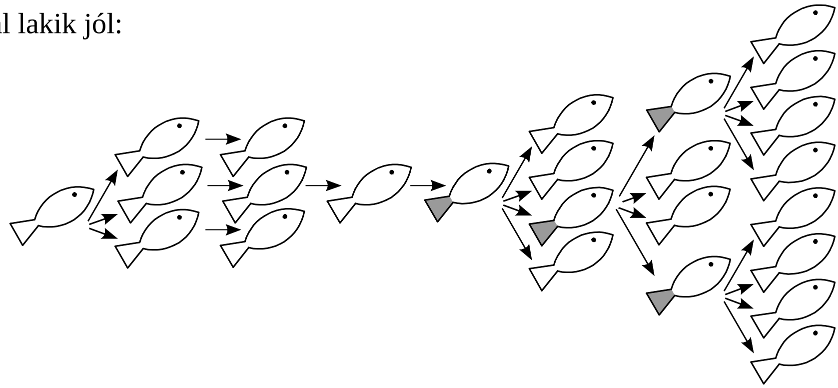
Megoldás: Előfordulhat, hogy az egyik halat felfalja egy másik, ezt a másikat ezután egy harmadik, a harmadikat egy negyedik, és így tovább, végül a 24. halat a 25. hal falja fel. Ekkor minden csuka egyetlen halat evett (az első kivételével, amelyik egyet sem), így egyetlen hal sem lakik jól a tóban, tehát (A) jó válasz.

Az alábbi ábrákon példát mutatunk arra, miként lakhat jól a tóban 2, 4 vagy 6 csuka. Az ábrákat jobbról balra haladva kell időrendben tekinteni: mindig az a csuka falja fel a másikat, amelyiktől kiindul a nyíl, és a szürke farokkal jelölt csukák laknak jól.

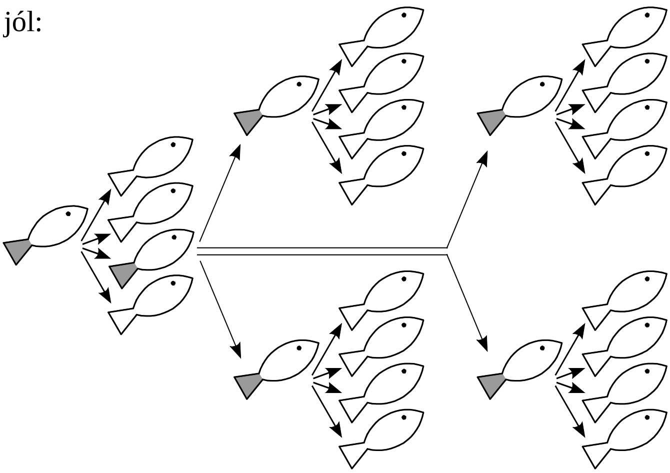
2 hal lakik jól:



4 hal lakik jól:



6 hal lakik jól:

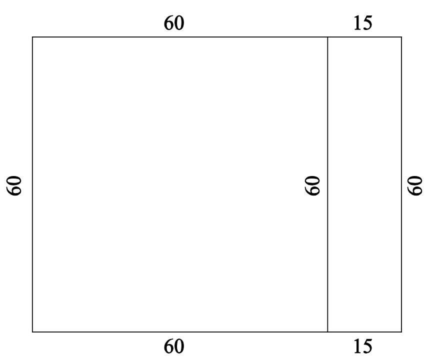


Nem lakhat jól 7 vagy annál több csuka a tóban, mert minden jóllakáshoz 4 másik halat meg kell enni, így ehhez összesen legalább 28 hal megevése szükséges, ami nyilván lehetetlen.

Helyes válasz(ok): A, B, C, D

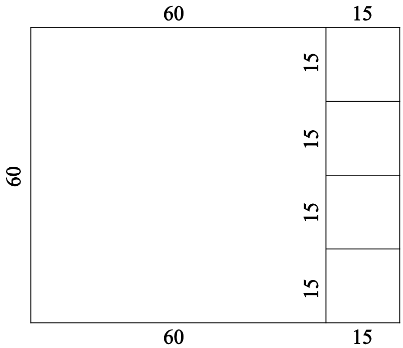
3. Egy 75 *cm* hosszú és 60 *cm* széles kartonlapot Andris maradék nélkül felvágott négyzet alakú részekre (minden rész oldalhossza centiméterben mérve egész szám). Az alábbiak közül hány négyzetre darabolhatta a kartonlapot?

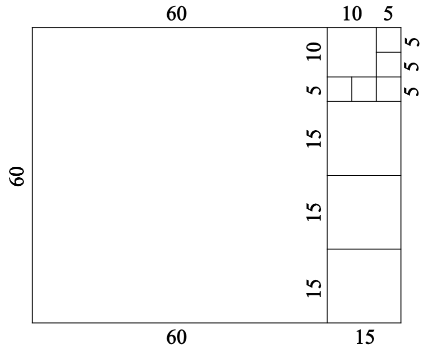
(A) *3* **(B)** *5* **(C)** *10* **(D)** *16* **(E)** *17*



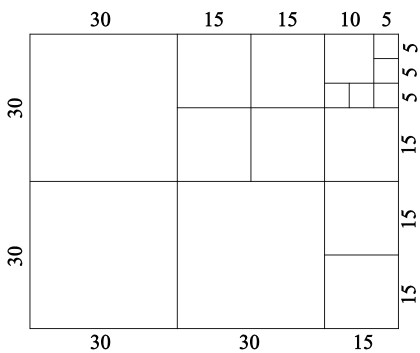
Megoldás: A legkevesebb számú négyzetre akkor darabolható a kartonlap, ha a lehető legnagyobb méretű négyzeteket hozzuk létre rajta. A legnagyobb méretű négyzet, amely leválasztható, a szélesség miatt a 60×60 centiméteres.
Az így keletkező 60×15-ös méretű téglalap oldalhosszaiból adódik, hogy ha ezt a lehető legkevesebb négyzetre szeretnénk feldarabolni, akkor 4 darab

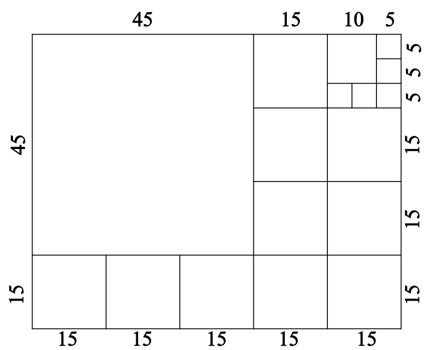
15×15-ös méretű négyzetet kapunk. Ekkor a lenti bal oldali ábra alapján 5 négyzetre daraboltuk az eredeti kartonlapot, így (B) helyes válasz. Kevesebb négyzetre sehogy nem tudjuk feldarabolni a kartonlapot, tehát (A) hibás válasz.





Most daraboljuk fel a jobb felső 15×15-ös négyzetet a fenti jobb oldali ábrán látható módon 5 darab 5×5-ös és 1 darab 10×10-es négyzetre. Ekkor a kartonlap összesen 10 négyzetre lesz felbontva, tehát a (C) válasz is jó.
A következő ábrákon megmutatjuk, hogy 16 és 17 négyzetre is feldarabolható az adott kartonlap. 16 négyzet esetén először a legutóbbi ábra 60×60-as négyzetét daraboljuk 4 egyenlő méretű négyzetre, majd az így létrejött egyik 30×30-as darabot további négy 15×15-ös méretű négyzetre. 17 négyzetet pedig úgy kaphatunk, hogy a 60×60-as méretű négyzetet most egy darab 45×45-ös és hét darab 15×15-ös méretű négyzetre daraboljuk.





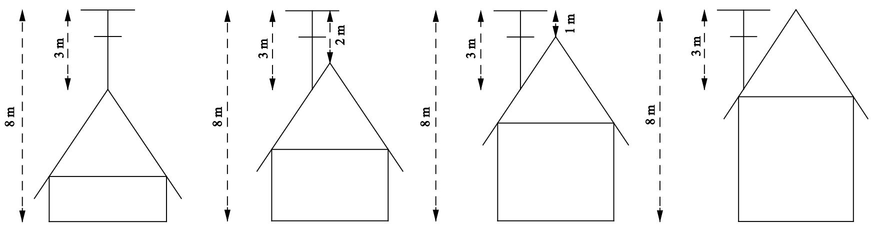
Így Andris a feladat feltételei alapján 3 négyzetre nem, de 5, 10, 16 vagy 17 négyzetre feldarabolhatta a kartonlapot.

Helyes válasz(ok): B, C, D, E

4. Egy ház magassága a rászerelt TV-antennával együtt 8 méter. Az antenna magassága 3 méter. Hány méter lehet a ház magassága antenna nélkül?

(A) *4* **(B)** *5* **(C)** *6* **(D)** *7* **(E)** *8*

Megoldás: Az antenna a tetőn többféleképpen helyezkedhet el:



Ha a ház legmagasabb pontján áll az antenna, akkor a ház magassága antenna nélkül $8-3=5$ méter, ennél alacsonyabb pedig nem lehet.
Ha a ház legmagasabb pontjánál 1 méterrel alacsonyabb pontban áll az antenna, tehát 2 méterrel nyúlik túl a házon, akkor a ház magassága antenna nélkül $8-(3-1)=8-2=6$ méter.
Ha a ház legmagasabb pontjánál 2 méterrel alacsonyabb pontban áll az antenna, tehát 1 méterrel nyúlik túl a házon, akkor a ház magassága antenna nélkül $8-(3-2)=8-1=7$ méter.
Ha a ház legmagasabb pontjánál 3 méterrel alacsonyabb pontban (vagy még annál is alacsonyabban) áll az antenna, tehát nem nyúlik túl a ház magasságán, akkor a ház magassága antenna nélkül $8-(3-3)=8-0=8$ méter.

Helyes válasz(ok): B, C, D, E

5. Három dobozunk van. Az egyik két aranytallért, a másik két ezüstöt, a harmadik pedig egy aranyat és egy ezüstöt tartalmaz. A dobozok tartalmát címkék jelzik, de ezek összekeveredtek, így minden dobozon rossz címke áll. Egy lépésben megnézhetünk egy dobozból egy tallért. Legkevesebb hány lépésre van szükségünk ahhoz, hogy meg tudjuk állapítani minden doboz tartalmát?

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *5*

Megoldás: Egyetlen lépéssel megállapítható mindhárom doboz tartalma. Abból a dobozból kell kivennünk 1 tallért, amelyiken az a címke áll, hogy 1 aranyat és 1 ezüstöt tartalmaz.

[redacted] | A A | E E

Tudjuk, hogy a címke nem a valóságot mutatja, ezért ebben a dobozban nem két eltérő, hanem két azonos tallér van. Így amikor ebből kiveszünk 1 tallért, tudni fogjuk, hogy ebben mindkét tallér ilyen.
Ha például az A E jelzésű dobozból kivett tallér arany volt (tehát ebben mindkét tallér arany), akkor tudni fogjuk, hogy a jobb oldali két doboz egyike két ezüstöt tartalmaz, de ez nem lehet az E E jelzésű, így a középső dobozban kell lennie a 2 ezüsttallérnak, és ezért a jobb oldali tartalmaz 1 ezüst- és 1 aranytallért.
Ha viszont az A E jelzésű dobozból kivett tallér ezüst volt (tehát ebben mindkét tallér ezüst), akkor tudni fogjuk, hogy a jobb oldali két doboz egyike két

aranyat tartalmaz, de ez nem lehet az A A jelzésű, így a jobb oldali dobozban kell lennie a 2 aranytallérnak, és ezért a középső tartalmaz 1 ezüst- és 1 aranytallért.

Helyes válasz(ok): A

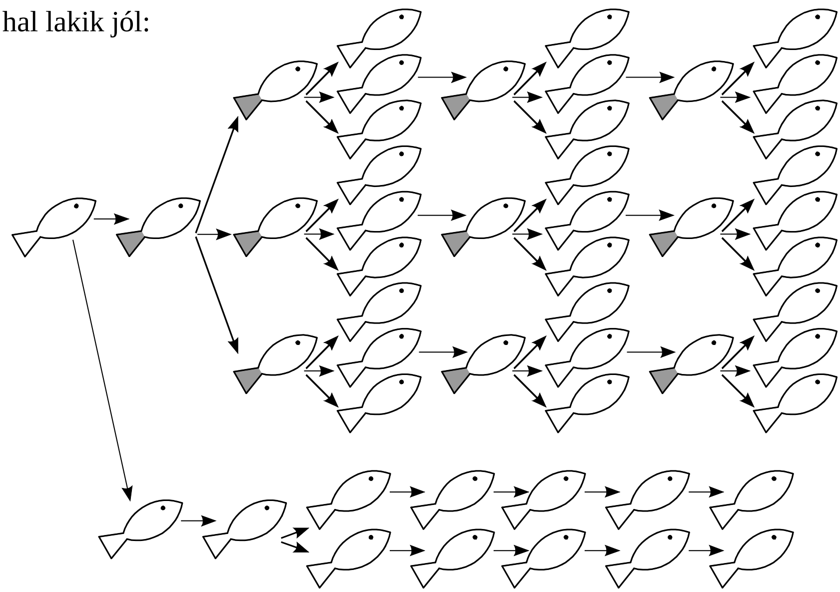
6. osztály

1. Egy üres tóban szabadon engedünk 50 éhes csukát, amelyek rövid időn belül elkezdik felfalni egymást. Egy csukát jóllakottnak nevezünk, és így több halat már nem fogyaszt, ha megevett 3 másik (éhes vagy jóllakott) csukát. Az 50 csuka közül hány lakhat jól élete során ebben a tóban?

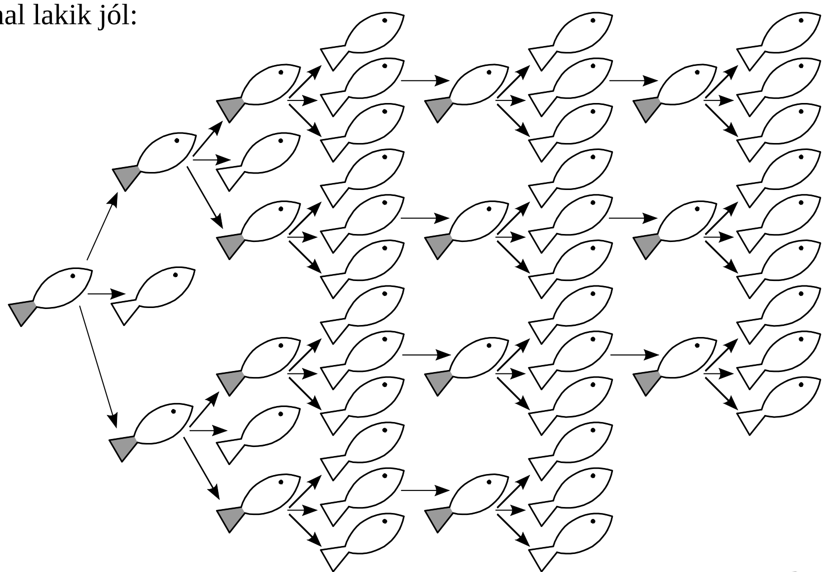
(A) *0* **(B)** *10* **(C)** *14* **(D)** *16* **(E)** *20*

Megoldás: Előfordulhat, hogy az egyik halat felfalja egy másik, ezt a másikat ezután egy harmadik, a harmadikat egy negyedik, és így tovább, végül a 49. halat az 50. hal falja fel. Ekkor minden csuka egyetlen halat evett (az első kivételével, amelyik egyet sem), így egyetlen hal sem lakik jól a tóban, tehát (A) jó válasz.
Nem lakhat jól 17, vagy annál több hal a tóban, mert minden jóllakáshoz 3 másik halat meg kell enni, így ehhez összesen legalább 51 hal megevése szükséges, ami nyilván lehetetlen. Tehát (E) biztosan hibás válasz.
A következő ábrákon példát mutatunk arra, miként lakhat jól a tóban 10, 14 vagy 16 csuka. Az ábrákat jobbról balra haladva kell időrendben tekinteni: mindig az a csuka falja fel a másikat, amelyiktől kiindul a nyíl, és a szürke farokkal jelölt csukák laknak jól.

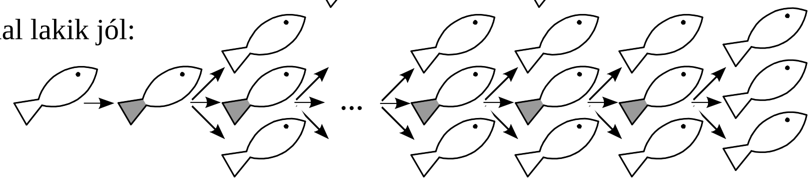
10 hal lakik jól:



14 hal lakik jól:



16 hal lakik jól:



(A kipontozott helyen még 11-szer ismétlődik egy szürke és két fehér hal.)

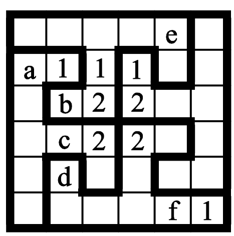
Helyes válasz(ok): A, B, C, D

2. Daraboljátok fel a mellékelt négyzetet a rácsvonalak mentén négy azonos alakú és méretű részre úgy, hogy mindegyikben egy 1-es és egy 2-es legyen! A szétvágás után a felsoroltak közül melyik két betűvel ellátott mező található ugyanazon a darabon?

				e	
a	1	1	1		
	b	2	2		
	c	2	2		
	d				
				f	1

(A) *a és b* **(B)** *a és c* **(C)** *b és c* **(D)** *d és f* **(E)** *b és e*

Megoldás: A feladat feltételeinek megfelelő feldarabolásra egyetlen helyes lehetőség van, mégpedig a következő:



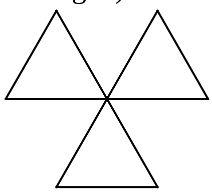
Az ábráról leolvashatjuk, hogy a betűk közül *a* és *c*, *b* és *e*, valamint *d* és *f* kerülnek azonos darabra. Tehát a válaszlehetőségek közül (A) hibás, (B) helyes, (C) hibás, (D) és (E) helyes.

Helyes válasz(ok): B, D, E

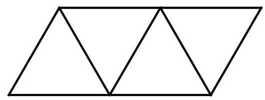
3. Egyforma pálcikák segítségével alkossatok 1 pálcika oldalhosszúságú háromszögeket! Az alábbiak közül hány ilyen háromszög hozható létre 9 pálcika felhasználásával, ha minden pálcika valamely háromszögnek az oldalát alkotja, és két pálcika nem fedheti egymást?

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *7*

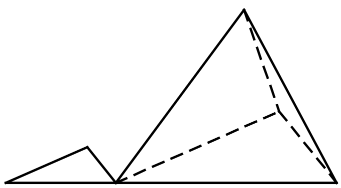
Megoldás: A legkevesebb háromszög akkor keletkezik, ha minden pálcika más-más háromszögnek oldala. Mivel $9:3=3$, ezért legkevesebb 3 háromszög oldalait alkothatja 9 pálcika, így (A) nem lehetséges. A további négy válaszlehetőség megvalósítható, ezekre egy-egy példát mutatunk (az első két esetben síkban, a másik két esetben térben). A térbeli ábrák közül az elsőn egy háromszög mellé helyeztünk egy tetraédert. A másodikon pedig mindkét tetraéder 3-3 oldallapja alkot egy-egy háromszöget, míg a közös alaplap adja a hetedik háromszöget.)



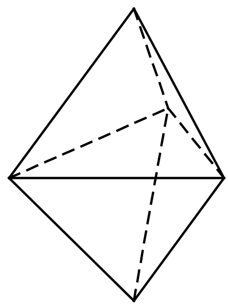
3 háromszög



4 háromszög



5 háromszög



7 háromszög

Helyes válasz(ok): B, C, D, E

4. Anna a 0, 1, 2, …, 9 számjegyek mindegyikét pontosan egyszer felhasználva olyan öttagú sorozatot írt fel, amelyben a szomszédos tagok különbsége mindig ugyanannyi. Az alábbiak közül melyik szám szerepelhet a sorozatban?

(A) *32* **(B)** *36* **(C)** *50* **(D)** *61* **(E)** *81*

Megoldás: Anna például az alábbi négy sorozat valamelyikét írhatta fel:

I.	10, 32, 54, 76, 98	(a különbség mindig 22)
II.	18, 36, 54, 72, 90	(a különbség mindig 18)
III.	50, 61, 72, 83, 94	(a különbség mindig 11)
IV.	54, 63, 72, 81, 90	(a különbség mindig 9)

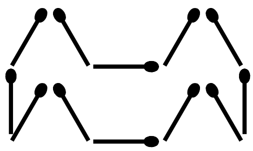
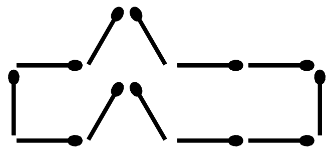
A négy sorozat tagjai között mind az öt válaszlehetőséget megtaláljuk.

Helyes válasz(ok): A, B, C, D, E

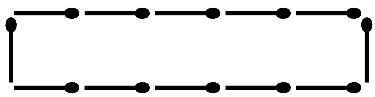
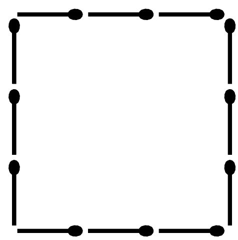
5. Készítsünk különböző területű sokszögeket úgy, hogy mindegyikhez pontosan 12 egyforma gyufaszálat használunk fel. Ha a négy ilyen gyufaszálból készített négyzet területét tekintjük 1 egységnyinek, akkor az alábbiak közül hány egység lehet a területe egy 12 gyufaszálból készült sokszögnek?

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *9* **(E)** *10*

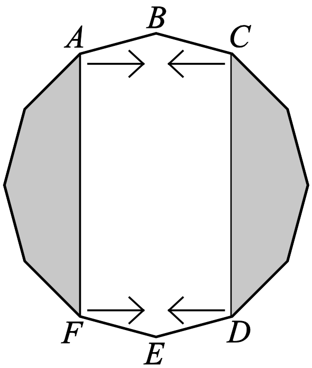
Megoldás: A 3 és 4 egység területű megoldást például úgy állíthatjuk elő, hogy egy 1×3-as, illetve 1×4-es téglalap oldalaira kifelé, illetve befelé szabályos háromszögeket állítunk, így az alakzat területe nem változik, csak a kerülete nő:

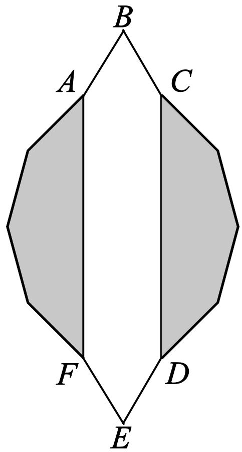



Az 5 és a 9 egység területű megoldás előállítható egy 1×5-ös téglalapból, illetve egy 3×3-as négyzetből:

(Megjegyzés: tetszőleges, 9 egységnél kisebb területet megkaphatunk úgy is, hogy a 3×3-as négyzet egyik párhuzamos oldalpárját „megdöntjük”, az így keletkező (3 gyufa oldalú) rombusz területe minden 9-nél kisebb pozitív értéket felvesz, például a 3, 4, 5 értékeket is.)
A 10 egység területű megoldás előállítása ennél lényegesen bonyolultabb, és 6. osztályban nem is elvárható (ez a válaszlehetőség tévedésből került a feladatsorba). A teljesség kedvéért itt röviden vázoljuk ezt a konstrukciót is. Abból indulunk ki, hogy a 12 gyufából előállítható legnagyobb területű sokszög egy egységoldalú szabályos tizenkétszög lesz, amelynek területe (itt nem részletezett, a gimnáziumi tananyag alapján kiszámítható módon) körülbelül 11,196 négyzetegység. Tekintsük most e tizenkétszög két-két szomszédos oldalát, amelyek egymással szemközt helyezkednek el (az ábrán az *AB*, *BC* és a *DE*, *EF* oldalpárokat). Ezek csúcsai meghatározzák az *ABCDEF* hatszöget, amelynek területe „folytonosan”, azaz minden közbülső értéket felvéve csökkenthető, ha a gyufák egymáshoz közelítésével (de az *AF* és *CD* távolságok megtartásával) a *B* és az *E* csúcsnál lévő 150°-os szöget csökkentjük. Így elérhető, hogy a hatszög területét csökkentve (és a két szélső, az ábrán szürkével jelölt sokszög területét nem változtatva) a tizenkétszög területe éppen 10 négyzetegységre csökkenjen:





Helyes válasz(ok): A, B, C, D, E

7. osztály

1. Az $A=\{-1;-2;-3;-4;-5\}$ és $B=\left\{-1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{3};-\frac{1}{4};-\frac{1}{5}\right\}$ számhalmazok minden elemének pontosan egyszeri felhasználásával alkossunk öt párt úgy, hogy a párok egyik tagja *A*-ból, a másik tagja *B*-ből kerüljön ki. Szorozzuk össze a párok tagjait, majd adjuk össze a szorzatokat. A felsorolt állítások közül melyik igaz a lehetséges összegekre vonatkozóan?

(A) *A legnagyobb 9-nél több.* **(B)** *A legkisebb 5-nél kevesebb.*

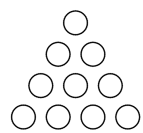
(C) *Szerepel közöttük a 8,7.* **(D)** *Szerepel közöttük az 5.*

(E) *Szerepel közöttük az 5,5.*

Megoldás: Minden egyes szorzat pozitív előjelű lesz, így a két halmaz helyett tekinthetjük azon *A* és *B* halmazokat is, amelyekben minden elem előjele pozitív. A lehetséges legnagyobb összeget akkor kapjuk, ha az *A* halmaz legnagyobb elemét a *B* halmaz legnagyobb elemével párosítjuk, a második legnagyobbat a második legnagyobbal, és így tovább. (Bármilyen más párosítás esetén, ha az $a_1<a_2$ és a $b_1<b_2$ elemek $a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1$ módon vannak párosítva, ennél nagyobb összeget kapunk az $a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2$ párosítással.) Így a lehetséges összegek maximuma $5\cdot 1+4\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{5}=8,7$. Hasonlóképpen a lehetséges minimumot akkor kapjuk, ha az *A* halmaz legnagyobb elemét a *B* halmaz legkisebb elemével párosítjuk, a második legnagyobb elemet a második legkisebbel, és így tovább. Az elérhető legkisebb összeg tehát $5\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}+1\cdot 1=5$. Így az (A) és (B) válasz biztosan hamis, a (C) és a (D) pedig igaz. Továbbá (E) is igaz, erre példa a következő összeg: $5\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{3}+2\cdot 1+1\cdot\frac{1}{2}=5,5$.

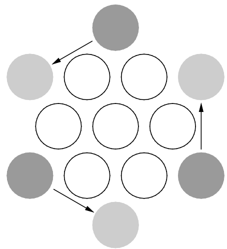
Helyes válasz(ok): C, D, E

2. Az ábrán látható 10 érmét szabályos háromszög alakba rendeztük. A felsoroltak közül hány érme áthelyezésével érhetjük el, hogy egy más helyzetű szabályos háromszöget kapjunk?

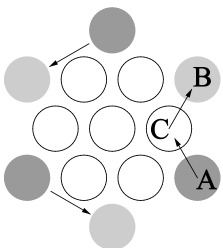


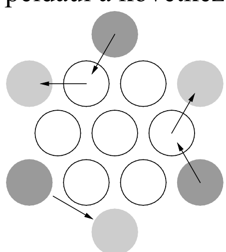
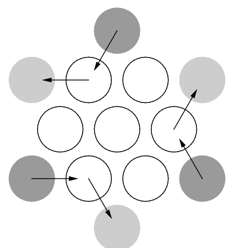
(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *6* **(E)** *7*

Megoldás: A három sarkon lévő érmét az ábra szerint áthelyezve egy másik szabályos háromszöget kapunk:

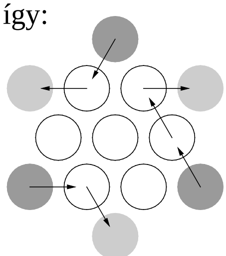


Az áthelyezés tehát 3 érmével megoldható. Az áthelyezett érmék számát egyesével növelhetjük, ha a fenti műveletsorban egy tetszőleges lépésnél egy másik érmét közbeiktatunk. Ha például az A érmét a B helyre szeretnénk áthelyezni, és C egy olyan érme, amelyhez egyébként nem nyúltunk volna, akkor az egy érmét érintő művelet (A áthelyezése a B helyre) két érme áthelyezésével is megvalósítható, ha először C-t áttesszük a B helyre, majd A-t áttesszük C eredeti helyére. Ilyen módon 4, 5, illetve 6 érme áthelyezésével is megvalósítható az áthelyezés, például a következő ábrákon látható módon:



Innen már könnyen kaphatunk 7 érmét használó műveletsort is, ha még egy új érmét közbeiktatunk, például így:



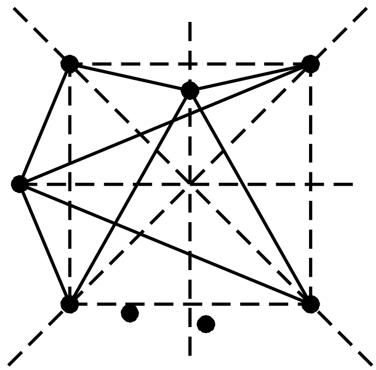
Helyes válasz(ok): A, B, C, D, E

3. 8 pontot elhelyeztünk a síkon úgy, hogy semelyik három nem esik egy egyenesre. Tekintsük az összes olyan háromszöget, amelynek csúcsai az említett 8 pont közül valók. Hány egyenlő szárú háromszög lehet ezek között?

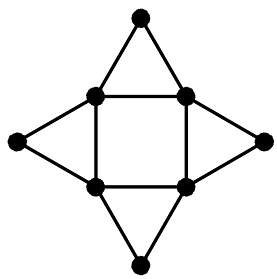
(A) *8* **(B)** *16* **(C)** *25* **(D)** *40* **(E)** *60*

Megoldás: A 8 pont összesen $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$ háromszöget határoz meg (a három csúcsot sorrendben $8 \cdot 7 \cdot 6$-féleképpen választhatjuk ki, de minden rögzített háromszöget 6-szor számoltunk a csúcsok lehetséges sorrendjei szerint), tehát 60 egyenlő szárú háromszöget biztosan nem kaphatunk. Megmutatjuk, hogy az összes többi válaszlehetőség elérhető.

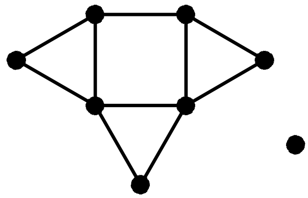
8 db egyenlő szárú háromszöget kapunk a következőképpen: az ábrán egy négyzetet, átlóegyeneseit és oldalfelező merőlegeseit rajzoltuk be (az utóbbiakat szaggatott vonallal). A 8 pont közül 4 a négyzet csúcsaiban található (ezek már önmagukban meghatároznak 4 egyenlő szárú háromszöget), 1-1 további pontot a felezőmerőlegeseken helyezünk el, a maradék kettőt pedig ezeken és az átlókon kívül, például a következő módon:



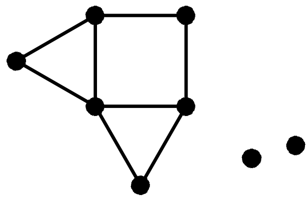
40 db egyenlő szárú háromszöget kapunk: Négy pontot helyezzünk egy négyzet csúcsaiba, a másik négyet pedig a négyzet oldalaira rajzolt szabályos háromszögek harmadik csúcsába. Ekkor a belső négy pont meghatároz 4 egyenlő szárú háromszöget, a külső 4 pont szintén. Egy külső pont és két belső pont 16-féleképpen határoz meg egyenlő szárú háromszöget (bármely külső ponthoz a belső négyzet bármelyik oldalának két végpontját választhatjuk), hasonlóképpen egy belső pont és két külső pont szintén 16-féleképpen határoz meg egyenlő szárú háromszöget (bármely belső ponthoz bármely két szomszédos külső pontot választhatjuk). Ez összesen 40 háromszög:



25 db egyenlő szárú háromszöget kapunk: Az előző konstrukcióból (40 db háromszög) hagyjunk el egy külső pontot (ezt a pontot helyezzük el úgy, hogy semelyik másik kettővel ne alkosson egyenlő szárú háromszöget). Ekkor a külső egyenlő szárú háromszögek száma 3-mal csökken, az egy külső és két belső pont által alkotottaké 4-gyel csökken, a két külső és egy belső pont által alkotottaké pedig 8-cal csökken. Vagyis összesen 25 háromszöget kapunk:



<u>*16 db egyenlő szárú háromszöget kapunk:*</u> Az előző konstrukcióból (25 db egyenlő szárú háromszög) hagyjunk el még egy külső pontot, az előbb elhagyottal szomszédosat (ezt tegyük olyan helyre, hogy ne alkosson egyenlő szárú háromszöget). Ekkor a külső egyenlő szárú háromszögek száma 1-gyel csökken, az egy külső és két belső pont által alkotottaké 4-gyel csökken, a két külső és egy belső pont által alkotottaké pedig szintén 4-gyel csökken. Vagyis összesen 16 háromszöget kapunk:



Helyes válasz(ok): A, B, C, D

4. 3 diót, 13 barackot és 8 körtét 256 piculáért adnak. 166 piculáért 2 diót, 8 barackot és 5 körtét adnak. Mindegyik diónak ugyanannyi az ára, hasonlóan igaz ez a körtékre és barackokra is. Hány piculába kerül összesen 1 dió, 1 barack és 1 körte?

(A) *54* **(B)** *56* **(C)** *60* **(D)** *62* **(E)** *66*

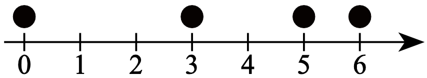
Megoldás: Jelölje egy-egy dió, barack, illetve körte árát piculában rendre d, b és k. Tudjuk, hogy $3d+13b+8k=256$, valamint $2d+8b+5k=166$, keressük $d+b+k$ értékét. Vonjuk ki a második egyenlet 5-szöröséből az első egyenlet 3-szorosát: $5(2d+8b+5k)-3(3d+13b+8k)=5\cdot 166-3\cdot 256$, amiből rendezés után éppen a keresett $d+b+k=62$ eredményt kapjuk.

Helyes válasz(ok): D

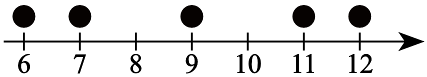
5. Egy teherautó első kerekének kerülete 2 méter, a hátsó kerék kerülete 3 méter. Induláskor mindkét jobb oldali keréknek az úttesttel éppen érintkező felületén egy-egy keskeny mészfolt van, a kerekek távolsága 3 méter. A mészfoltok a teherautó mozgása közben nyomot hagynak az úton (fordulatonként egyet). Hány mészfolt keletkezhet a teherautó mozgása nyomán egy 200 méteres útszakaszon?

(A) *132* **(B)** *133* **(C)** *134* **(D)** *135* **(E)** *166*

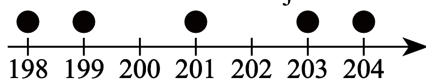
Megoldás: Az első kerék 2 méterenként, a hátsó kerék 3 méterenként hagy egy-egy foltot, így (egyenes vonalú mozgást feltételezve) a foltok 6 méterenként periodikusan ismétlődnek az úttesten. Ha egy számegyenesen a 0-ba helyezzük a kiindulási állapotban a teherautó hátsó kerekét, akkor a foltok a következőképpen helyezkednek el (a továbbiakban is ezt a számegyenest fogjuk használni):



Az egyetlen különbség a későbbiekben, hogy az első kerék még egy foltot hagy, amely a fenti ábrán az 1-nél még nem látszott, hiszen az első kerék csak a 3-tól indult. Így a folytatás, és minden azt követő periódus a következőképpen néz ki:

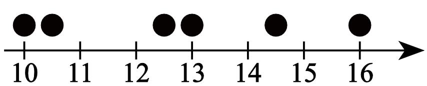


Látható tehát, hogy egy periódus során (például a $[6; 12[$ intervallumon) 4 mészfolt keletkezik. Mivel $200 = 33 \cdot 6 + 2$, ezért a 200 méteres útszakasz biztosan tartalmazni fog 33 teljes periódust, amely $33 \cdot 4 = 132$ mészfoltot tartalmaz, vagy 131-et, ha a kezdeti szakaszt is belevesszük. Például a $[0; 198[$ intervallum 131 mészfoltot tartalmaz. Ábrázoljuk a számegyenes ezt követő részét is:



Az ábráról leolvasható, hogy a $[0; 200]$ intervallumban $131 + 2 = 133$ mészfolt van. Mozgassuk ezt az intervallumot apránként felfelé, és vizsgáljuk meg, hogyan változik a mészfoltok száma. A $[0{,}5; 200{,}5]$ intervallumban 132 mészfolt van, hiszen kikerült a 0. Az $[1; 201]$ intervallumban ismét 133 mészfolt van (a 201 bekerült), a $[2; 202]$ intervallumban szintén 133 (nem történt változás), a $[3; 203]$ intervallumban pedig 134 (bekerült a 203). A $[4; 204]$ intervallumban szintén 134 mészfolt lesz (kikerült a 3, bekerült a 204), az $[5; 205]$ intervallumban pedig már 135 (bekerült a 205). Tehát 132, 133, 134 és 135 mészfolt elérhető ilyen módon.

Ha a teherautó nem egyenes vonalban mozog, például rögtön indulás után kanyarodik egyet, akkor elképzelhető, hogy a két keréken lévő mészfolt nyoma soha nem fog egymásra esni, azaz egy 6 méteres szakaszon az első kerék 3, a hátsó kerék 2 különálló nyomot hagy, vagyis 5 nyom keletkezik. Ha az indulást követő kanyarodás után már egyenes vonalban mozog a teherautó, akkor a mészfoltok szintén periodikusak lesznek, minden 6 méteres szakaszra 5 mészfolt esik. Így 198 méterre $33 \cdot 5 = 165$ mészfolt jut, ehhez még egyet hozzávéve kaphatunk 166 mészfoltot, ha például 10 métertől indulunk, és a mészfoltok a következőképpen helyezkednek el:



Ekkor a $\left[10; 16\right[$ intervallum ismétlődik periodikusan, az első kerék a 10,5; 12,5; 14,5; … helyeken hagy nyomot, a hátsó kerék pedig a 10; 13; 16; … helyeken. A $\left[10; 210\right]$ intervallumban $165+2=167$ mészfolt, a $\left[10{,}1; 210{,}1\right]$ intervallumban ennél eggyel kevesebb, azaz 166 mészfolt található. Tehát mind az öt válaszlehetőség megvalósítható.

Helyes válasz(ok): A, B, C, D, E

8. osztály

1. A tíz számjegy mindegyikének egyszeri felhasználásával alkossunk olyan számsort, amelyben bármely két szomszédos jegyből az adott sorrendben alkotott kétjegyű szám osztható 7-tel vagy 13-mal. (Ha egy kétjegyű szám 0-val kezdődik, akkor csak a második jegyet vesszük figyelembe.) Melyik állítás igaz egy ilyen számsorra?

(A) *Első eleme a 7.* **(B)** *Utolsó eleme a 6.* **(C)** *Hetedik eleme a 4.*

(D) *Nyolcadik eleme az 5.* **(E)** *Nem létezik ilyen számsor.*

Megoldás: A lehetséges kétjegyű számok a következők: 07, 13, 14, 21, 26, 28, 35, 39, 42, 49, 52, 56, 63, 65, 70, 78, 84, 91, 98 (a 77-et eleve kizártuk, mivel nem lehet ismétlődés a számjegyekben). Láthatjuk, hogy a 0 után kötelezően 7, a 8 után kötelezően 4 következik a számban (ha sem a 0, sem a 8 nem az utolsó jegy). A 0 nem lehet utolsó, hiszen ekkor a sor vége csak 70 lehetne, de 7-re nem végződik egyetlen megfelelő kétjegyű szám se. Vagyis a számsorban szerepel a 07, ekkor azonban nem szerepelhet benne a 70, és mivel más szám nem végződik 0-ra, ezért a 07 biztosan a szám legelején áll, sőt a folytatás is egyértelmű: a számsor eleje csak 0784 lehet. A továbbra is felhasználható kétjegyű számok: 13, 21, 26, 35, 39, 42, 49, 52, 56, 63, 65, 91.
A 0784-et követően 2-es vagy 9-es számjegy következhet. A 07842 esetet folytatva minden lehetséges próbálkozásnál elakadunk (az elérhető leghosszabb számsorozat a 078421356, illetve a 07842635, egyik sem folytatható tovább). A 07849 esetet folytatva egyetlen jó megoldást kapunk: 0784913526.

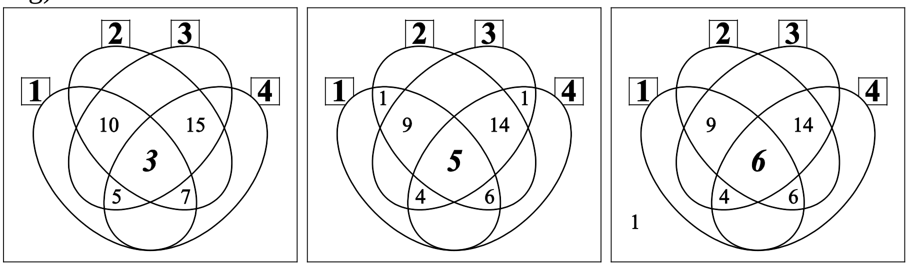
Helyes válasz(ok): B, D

2. Egy matematikaverseny országos döntőjében részt vevő 40 tanuló mindegyikének ugyanazt a 4 feladatot kellett megoldania. Az első feladatot 25 versenyző, a másodikat 35, a harmadikat 33, a negyedik feladatot 30 versenyző oldotta meg. Az alábbiak közül hányan oldhatták meg mind a négy feladatot?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *3* **(D)** *5* **(E)** *6*

Megoldás: Keressünk először alsó becslést a mind a négy feladatot megoldó versenyzők számára. Tekintsük először csak az első két feladatot. Mivel az elsőt 25-en, a másodikat 35-en oldották meg, és 25 + 35 = 60, ami 20-szal nagyobb az összlétszámnál (40 fő), így legalább 20-an biztosan megoldották az első és a második feladatot is. Tekintsük most az első és a második feladatot megoldók, valamint a harmadik feladatot megoldók számát. Mivel az előbbi érték legalább 20, az utóbbi pedig pontosan 33, továbbá 20 + 33 = 53, ami 13-mal nagyobb az összlétszámnál, így legalább 13-an biztosan megoldották az első, a második és a harmadik feladatot is. Hasonlóképpen kapjuk, hogy mivel 13 + 30 = 43, így legalább 3-an biztosan megoldották mind a négy feladatot.
Felső becslést könnyen találunk a keresett mennyiségre: elképzelhető, hogy az első feladatot megoldó 25 versenyző egyben a másik három feladatot is megoldotta, tehát a mind a négy feladatot megoldó versenyzők maximális száma

25. Tehát a mind a négy feladatot megoldók száma biztosan 3 és 25 között van. Megmutatjuk, hogy mindhárom lehetséges válasz (3, 5, 6) elérhető, ehhez halmazábrán ábrázoljuk a versenyzőket. A megoldásokat az alábbi ábrák mutatják (a harmadik esetben egy versenyző egyik feladatot sem oldotta meg):



Helyes válasz(ok): C, D, E

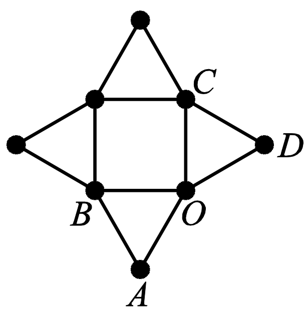
3. 9 pontot elhelyeztünk a síkon úgy, hogy semelyik három nem esik egy egyenesre. Tekintsük az összes olyan háromszöget, amelynek csúcsai az említett 9 pont közül valók. Hány egyenlő szárú háromszög lehet ezek között?

(A) *16* **(B)** *27* **(C)** *44* **(D)** *73* **(E)** *84*

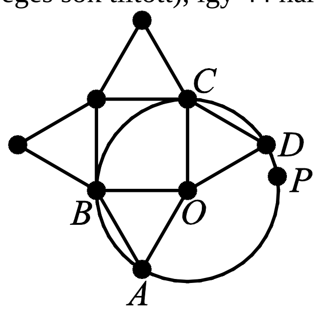
Megoldás: A 9 pont összesen $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ különböző szakaszt határoz meg. Minden szakaszhoz, mint alaphoz legfeljebb 2 egyenlő szárú háromszög tartozik (ez akkor van, ha egy másik szakasz az egyiknek oldalfelező merőlegese), így legfeljebb $2 \cdot 36 = 72$ egyenlő szárú háromszöget határozhat meg a 9 pont, vagyis (D) és (E) biztosan nem lehet igaz.

Megmutatjuk, hogy az összes többi válaszlehetőség elérhető.

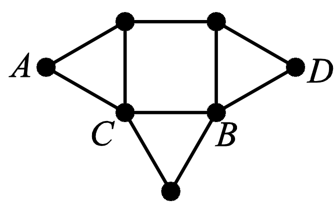
<u>*44 db egyenlő szárú háromszöget kapunk:*</u> Négy pontot helyezzünk egy négyzet csúcsaiba, másik négyet pedig a négyzet oldalaira rajzolt szabályos háromszögek harmadik csúcsába. Ezzel nyolc pontot elhelyeztünk úgy, hogy ezek 40 db egyenlő szárú háromszöget alkotnak (bővebben: lásd 7. oszt. 13. feladat):



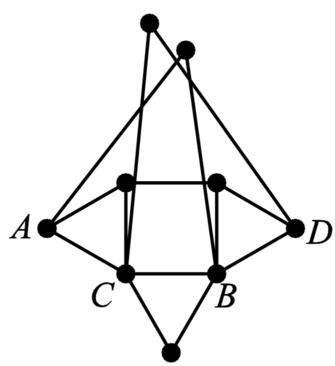
Helyezzünk el most még egy pontot úgy, hogy ezzel 4 új egyenlő szárú háromszög jöjjön létre. Tekintsük az *O* középpontú, *OA* sugarú körvonalat. Ennek minden (eddig még fel nem vett) *P* pontja egyenlő szárú háromszöget alkot az O középponttal és az A, B, C, D pontok egyikével ($OP = OA = OB = OC = OD$). Vegyük a körvonal egy olyan pontját, amely nem esik egy egyenesre az eddig megadott pontok közül semelyik kettővel, és nem alkot további egyenlő szárú háromszögeket (ilyen pont biztosan van, hiszen a körvonal végtelen sok pontjából csak véges sok tiltott), így 44 háromszöget kapunk:



<u>*27 db egyenlő szárú háromszöget kapunk:*</u> Négy pontot helyezzünk egy négyzet csúcsaiba, másik hármat pedig a négyzet oldalaira rajzolt szabályos háromszögek harmadik csúcsába. Ezzel hét pontot elhelyeztünk úgy, hogy ezek 25 db egyenlő szárú háromszöget alkotnak (bővebben: lásd 7. oszt. 13. feladat):

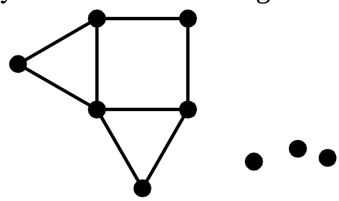


Helyezzünk most el egy-egy további pontot AB, illetve CD szakaszfelező merőlegesén úgy, hogy ezek csak A-val és B-vel, illetve C-vel és D-vel alkossanak egy-egy újabb egyenlő szárú háromszöget, így 27 db háromszöget kapunk:



<u>*16 db egyenlő szárú háromszöget kapunk:*</u> Négy pontot helyezzünk egy négyzet csúcsaiba, másik kettőt pedig a négyzet két szomszédos oldalára rajzolt szabályos háromszög harmadik csúcsába. Ezzel hat pontot elhelyeztünk úgy, hogy ezek 16 db egyenlő szárú háromszöget alkotnak (bővebben: lásd 7. oszt.

13. feladat), a fennmaradó három pontot pedig úgy tegyük le, hogy semelyik másikkal ne alkosson egyenlő szárú háromszöget:

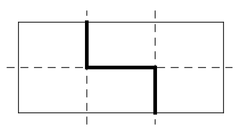


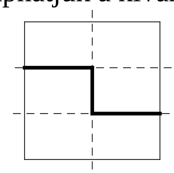
Helyes válasz(ok): A, B, C

4. Van egy 18 *cm* hosszú és 8 *cm* széles kartonlapunk. Vágjuk szét két darabra úgy, hogy a két darabból négyzetet lehessen összeilleszteni (az átfedés nem megengedett). Hány centiméter hosszú lehet a vágás vonala?

(A) *8* **(B)** *12* **(C)** *14* **(D)** *16* **(E)** *18*

Megoldás: A feldarabolás és az összeillesztés során a terület nem változik, tehát az eredetileg $18 \cdot 8 = 144$ cm^2 területű téglalapból 144 cm^2 területű négyzetet kapunk. Mivel $144 = 12 \cdot 12$, ezért a keletkező négyzet oldalhossza 12 *cm*. Ezt úgy érhetjük el, ha a téglalap 18 *cm*-es oldala 6 *cm*-rel rövidül, míg a 6 *cm*-es oldala 6 *cm*-rel hosszabbodik.
Amennyiben a hosszabbik oldal harmadolóegyenesei és a rövidebb oldal felezőegyenese mentén az első ábra szerinti töröttvonal mentén darabolunk, a jobb oldali részt feljebb, majd balra tolva megkaphatjuk a kívánt négyzetet:





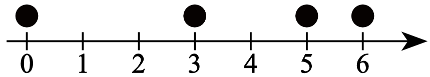
Így a vágás vonalának hossza $4 + 6 + 4 = 14$ *cm*.

Helyes válasz(ok): C

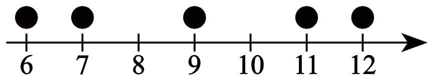
5. Egy teherautó első kerekének kerülete 2 méter, a hátsó kerék kerülete 3 méter. Induláskor mindkét jobb oldali keréknek az úttesttel éppen érintkező felületén egy-egy keskeny mészfolt van, a kerekek távolsága 3 méter. A mészfoltok a teherautó mozgása közben nyomot hagynak az úton (fordulatonként egyet). Hány mészfolt keletkezhet a teherautó mozgása nyomán egy 200 méteres útszakaszon?

(A) *132* **(B)** *133* **(C)** *134* **(D)** *135* **(E)** *166*

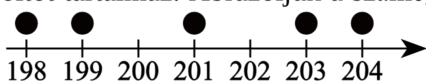
Megoldás: Az első kerék 2 méterenként, a hátsó kerék 3 méterenként hagy egy-egy foltot, így (egyenes vonalú mozgást feltételezve) a foltok 6 méterenként periodikusan ismétlődnek az úttesten. Ha egy számegyenesen a 0-ba helyezzük a kiindulási állapotban a teherautó hátsó kerekét, akkor a foltok a következőképpen helyezkednek el (a továbbiakban is ezt a számegyenest fogjuk használni):



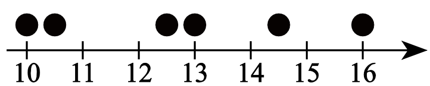
Az egyetlen különbség a későbbiekben, hogy az első kerék még egy foltot hagy, amely a fenti ábrán az 1-nél még nem látszott, hiszen az első kerék csak a 3-tól indult. Így a folytatás, és minden azt követő periódus a következőképpen néz ki:



Látható tehát, hogy egy periódus során (például a $[6; 12[$ intervallumon) 4 mészfolt keletkezik. Mivel $200 = 33 \cdot 6 + 2$, ezért a 200 méteres útszakasz biztosan tartalmazni fog 33 teljes periódust, amely $33 \cdot 4 = 132$ mészfoltot tartalmaz, vagy 131-et, ha a kezdeti szakaszt is belevesszük. Például a $[0; 198[$ intervallum 131 mészfoltot tartalmaz. Ábrázoljuk a számegyenes ezt követő részét is:



Az ábráról leolvasható, hogy a $[0; 200]$ intervallumban $131 + 2 = 133$ mészfolt van. Mozgassuk ezt az intervallumot apránként felfelé, és vizsgáljuk meg, hogyan változik a mészfoltok száma. A $[0,5; 200,5]$ intervallumban 132 mészfolt van, hiszen kikerült a 0. Az $[1; 201]$ intervallumban ismét 133 mészfolt van (a 201 bekerült), a $[2; 202]$ intervallumban szintén 133 (nem történt változás), a $[3; 203]$ intervallumban pedig 134 (bekerült a 203). A $[4; 204]$ intervallumban szintén 134 mészfolt lesz (kikerült a 3, bekerült a 204), az $[5; 205]$ intervallumban pedig már 135 (bekerült a 205). Tehát 132, 133, 134 és 135 mészfolt elérhető ilyen módon.
Ha a teherautó nem egyenes vonalban mozog, például rögtön indulás után kanyarodik egyet, akkor elképzelhető, hogy a két keréken lévő mészfolt nyoma soha nem fog egymásra esni, azaz egy 6 méteres szakaszon az első kerék 3, a hátsó kerék 2 különálló nyomot hagy, vagyis 5 nyom keletkezik. Ha az indulást követő kanyarodás után már egyenes vonalban mozog a teherautó, akkor a mészfoltok szintén periodikusak lesznek, minden 6 méteres szakaszra 5 mészfolt esik. Így 198 méterre $33 \cdot 5 = 165$ mészfolt jut, ehhez még egyet hozzávéve kaphatunk 166 mészfoltot, ha például 10 métertől indulunk, és a mészfoltok a következőképpen helyezkednek el:



Ekkor a $[10; 16[$ intervallum ismétlődik periodikusan, az első kerék a 10,5; 12,5; 14,5; … helyeken hagy nyomot, a hátsó kerék pedig a 10; 13; 16; … helyeken. A $[10; 210]$ intervallumban $165 + 2 = 167$ mészfolt, a $[10,1; 210,1]$

intervallumban ennél eggyel kevesebb, azaz 166 mészfolt található. Tehát mind az öt válaszlehetőség megvalósítható.

Helyes válasz(ok): A, B, C, D, E

9. osztály

1. Anna vásárolt egy almát, egy banánt és egy narancsot. Ha egy alma a harmadába, egy narancs a kétkilencedébe, egy banán a kétharmadába kerülne a jelenlegi árnak, akkor 200 Ft-ot, ha pedig az alma kétötödébe, a narancs felébe, a banán tizedébe kerülne, akkor 100 Ft-ot fizetett volna. Hány forintot fizetett Anna a három gyümölcsért?

(A) *300* **(B)** *400* **(C)** *500* **(D)** *600* **(E)** *Nem állapítható meg.*

Megoldás: Az alma árát a-val, a banán árát b-vel és a narancs árát n-nel jelölve, a feltételek alapján felírhatjuk a következő egyenlőségeket:

$$\frac{1}{3}a+\frac{2}{9}n+\frac{2}{3}b=200$$

$$\frac{2}{5}a+\frac{1}{2}n+\frac{1}{10}b=100$$

Az első egyenlőséget 9-cel, a másodikat 10-zel végigszorozva kapjuk, hogy:

$$3a+2n+6b=1800$$

$$4a+5n+b=1000$$

Ha összeadjuk e két egyenlőség megfelelő oldalait, a $7a+7n+7b=2800$ egyenlethez jutunk, amit 7-tel osztva kapjuk, hogy $a+n+b=400$. Tehát a három gyümölcsért Anna 400 Ft-ot fizetett összesen.

Helyes válasz(ok): B

2. Az MN egyenesen egymástól egyenlő távolságra helyezkedik el harminc pont: $A_1, A_2, A_3, \ldots A_{30}$. Ezekből a pontokból harminc egyenes út indul ki az MN egyenes azonos partján. Az utak az MN egyenessel a következő szögeket zárják be:

A kezdőpontok sorszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Az út és az *MN* egyenes által bezárt szög fokban	60	30	15	20	155	45	10	35	140	50	125	65	85	86	80
A kezdőpontok sorszáma	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Az út és az *MN* egyenes által bezárt szög fokban	75	78	115	95	25	28	158	30	25	5	15	160	170	20	158

Mind a harminc pontból egyidőben indul el egy-egy autó, és azonos egyenletes sebességgel egyenesen halad ezeken az utakon. Minden kereszteződésben sorompó áll. Amikor az első autó áthalad a kereszteződésen, a sorompó lezárul és elzárja az utat a más irányból érkező autók előtt. Az autók közül mely pontokból indulnak azok, amelyek minden útjukba eső kereszteződésen áthaladnak?

(A) A_{11} **(B)** A_{14} **(C)** A_{23} **(D)** A_{24} **(E)** A_{30}

Megoldás: Jelöljük az A_n pontból kiinduló utat a_n-nel, azt a szöget, amelyet ez az út az MN félegyenessel bezár, α_n-nel és az a_m és a_n utak kereszteződését P_{mn}-nel. Az a_n úton haladó autót nevezzük röviden a_n-nek.

Ekkor:

I. Ha az a_n autó a P_{mn} kereszteződésen fennakad, akkor az α_n szög jobban megközelíti a 90°-ot, mint az α_m szög (az a_n út meredekebben halad, mint az a_m út).

II. Legyen $p < q$. Az a_p és a_q utak metszik egymást, ha $\alpha_p < \alpha_q$, és nem metszik egymást, ha $\alpha_p \geq \alpha_q$.

III. Ha az a_n utat metsző összes többi út az a_n-nél kevésbé meredek, akkor az a_n autó minden kereszteződésen áthalad. Ez az I.-ből következik.

IV. Legyen a_m a legmeredekebb azok közül az utak közül, amelyek metszik az a_n utat. Kimutatható, hogy ha a_m meredekebb, mint a_n akkor az a_m autó a P_{mn} pontnál előbb nem rekedhet meg. Valóban, tegyük fel, hogy az a_m autó megreked az A_mP_{mn} szakaszon levő P_{qm} kereszteződésél. Ekkor az I. értelmében a_q meredekebb, mint a_m, tehát a feltétel értelmében nem metszheti a_n-t. Bebizonyítjuk, hogy ez lehetetlen. Két esetet vizsgálunk meg:

a) Az A_q pont az A_nA_m szakaszon kívül helyezkedik el. Ha a_q metszi az $A_nP_{mn}A_m$ háromszög A_mP_{mn} oldalát és nem metszi az A_nA_m oldalt, akkor ez az út feltétlenül metszi A_nP_{mn}-et. Következésképpen ez az eset nem lehetséges.

b) Az A_q pont az A_nA_m szakaszon helyezkedik el. Tegyük fel először, hogy $n < q < m$. Abból, hogy az a_n és a_m, a_q és a_m útpárok metszik egymást és az a_n és az a_q útpár nem metszi egymást, a II. értelmében következik, hogy $\alpha_q \leq \alpha_n < \alpha_m$.

Amennyiben α_m jobban megközelíti a 90°-ot, mint α_n, az $\alpha_n < \alpha_m$ egyenlőtlenség csak $\alpha_n < 90°$ esetén lehetséges. De akkor az $\alpha_q \leq \alpha_n$ egyenlőtlenségből következik, hogy a_q nem meredekebb, mint a_n, ami ellentmond a feltételnek. Analóg módon történik az $m < q < n$ eset vizsgálata is.

V. A IV. és I. pontokból következik, hogy ha az a_n autó áthalad minden kereszteződésen, akkor az a_n-t metsző összes többi út kevésbé meredek, mint a_n (a III. feltétel megfordítása).

A III. és V. pontokból most már megkaphatjuk a feladat megoldását. Mindenekelőtt világos, hogy a 30 út közül a legmeredekebb úton haladó autó, azaz a 14. nem reked meg sehol. Az összes többi autó, amely a 14. utat metsző uta-

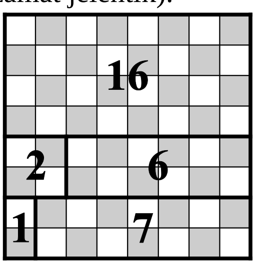
kon halad, azaz az 1., 2., 3., 4., 6., 7., 8., 10., 12., 13., 18., 19., 22., 27., 28., 30. megreked.
Az első 13 autó közül csak az 5.,9. és 11. maradt megvizsgálni. De e három útjának mindegyike metszi az első utat, amely meredekebb ezeknél, így az ezen az úton haladó autók szintén megrekednek.
A 16-30. autók közül a legmeredekebb úton a 19-es halad. A 15-18. utak metszik a két egymást metsző 14-es és 19-es utak egyikét; mivel ezek mindegyike kevésbé meredek, mint ez utóbbi kettő, így az ezeken az utakon haladó autók megrekednek.
A 20-30-as utak közül a legmeredekebben a 23-as út vezet. A 20-as és a 21-es út metszi a 23-ast, ezért ez a két autó szintén megreked. Továbbá a 24-30-as utak közül a legmeredekebb a 24-es. A 25-30-as utak közül a legmeredekebb a 30-as, amely metszi a kevésbé meredek 25-ös, 26-os és 29-es utakat. Mivel a 30-as út szintén metszi a 14-est, így a 14-es út kivételével csak a 23-as és 24-es nem metszi a meredekebb utakat.
Tehát csak a 14-es, 23-as és a 24-es autókat nem fogják sehol sem feltartóztatni a sorompók.

Helyes válasz(ok): B, C, D

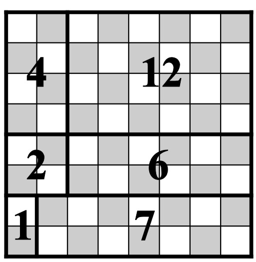
3. Egy 8×8 mezőből álló sakktáblát úgy kell feldarabolnunk *n* darab téglalapra, hogy egyetlen mezőt sem vághatunk ketté, mindegyik téglalapnak ugyanannyi fehér mezőt kell tartalmaznia, mint feketét, de bármely két különböző téglalapban a fehér mezők számának különböznie kell. Az alábbiak közül *n* mely értéke esetén tudjuk ezt megvalósítani?

(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *7* **(D)** *8* **(E)** *9*

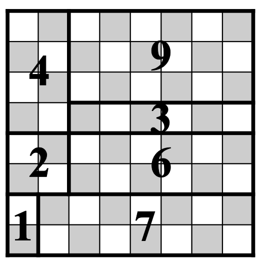
Megoldás: Már A 8×8-as sakktáblán a fehér mezők száma 32. Mivel bármely két különböző téglalapban különböző számú fehér mezőnek kell lennie, ezért ha az egyes téglalapokban lévő fehér mezők számát $k_1, k_2, ..., k_n$ jelöli, akkor teljesülnie kell az $1+2+...+n \le k_1+k_2+...+k_n = 32$ becslésnek, amiből $n \le 7$ következik (hiszen $1+2+...+8=36$). Tehát n értéke nem lehet nagyobb 7-nél.
A következőkben egy-egy példát mutatunk 5, 6, illetve 7 megfelelő téglalapra történő darabolásra (a téglalapokba írt számok a bennük lévő fehér mezők számát jelentik).



$n=5$



$n=6$



$n=7$

Helyes válasz(ok): A, B, C

4. Egy játéktáblán körben 12 mező helyezkedik el. Négy szomszédos mezőn négy különböző színű figura áll ebben a sorrendben: piros, sárga, zöld, kék. Kezdőbetűik segítségével ezt a sorrendet így jelöljük: *PSZK*.
Bármely figura léphet bármely irányban az ötödik mezőre, tehát négy mezőt átugorva, feltéve, hogy szabad az a mező, amelyre lépni akar. Bizonyos számú lépés után a figurák ismét azon a négy mezőn állnak csak más sorrendben. Az alábbiakból mi lehet most a sorrend?

(A) *ZKSP* **(B)** *SPKZ* **(C)** *KZSP* **(D)** *ZSKP* **(E)** *SKPZ*

Megoldás: Változtassuk meg a mezők sorrendjét! Rendezzük el a mezőket úgy, hogy azok kerüljenek egymás mellé, amelyekből egy lépéssel átléphetünk a másikba. Az első mező után tegyük tehát a hatodikat, ezután a tizenegyediket, majd a negyediket, stb. Az átrendezett táblát a következő vázlattal szemléltethetjük:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
P & & & & & & K & & & & S \\
1 & \leftrightarrow & 6 & \leftrightarrow & 11 & \leftrightarrow & 4 & \leftrightarrow & 9 & \leftrightarrow & 2 \\
\updownarrow & & & & & & & & & & \updownarrow \\
8 & \leftrightarrow & 3 & \leftrightarrow & 10 & \leftrightarrow & 5 & \leftrightarrow & 12 & \leftrightarrow & 7 \\
 & & Z & & & & & & & &
\end{array}$$

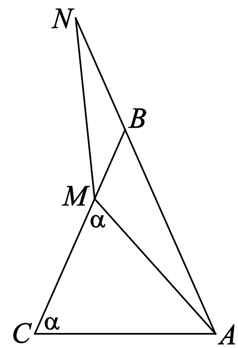
A mezők eredeti sorrendjének gyakorlatilag nincs jelentősége, csak a számozás sorrendjével jelöljük, hogy milyen kapcsolat van a vázlatunk és az eredeti tábla között. A figurák eredeti helyzetét a mezők mellé írt betűkkel jelöltük. A lépésszabály ezen az új táblán egészen egyszerű: minden figura egyet léphet a szomszédos mezőre, ha az illető mező nincs foglalva. Világos, hogy a figurák csak úgy cserélhetnek helyet, ha mindnyájan ugyanabban az irányban haladnak az új játéktáblán. Egyik sem előzheti meg ezen a másikat, hiszen ez azt jelentené, hogy olyan mezőn kellene áthaladnia, amelyen valamilyen más figura áll, s ez elállja az útját.
Ha tehát a *P* a 4-es mezőt foglalja el, akkor az eredetileg a 4-es mezőn álló *K* figurának a 2-es mezőt kell elfoglalnia, az *S*-nek a 3-ast, a *Z*-nek az 1-est.
Tehát a *ZKSP* sorrend lehetséges, vagyis (A) helyes válasz.
Ha *P* a 2-es mezőt foglalja el, akkor csakis az *SPKZ* sorrend a helyes, ha pedig *P* a 3-as mezőre kerül, akkor csakis a *KZPS* sorrend lehetséges. Így (B) jó válasz míg a (C) nem. Semmilyen más csere nem lehetséges, ezért (D), (E) válaszok hibásak.

Helyes válasz(ok): A, B

5. Az *ABC* háromszögben *AB* = *BC*. Legyen a *BC* szárnak *M* olyan pontja, amelyre *AM* = *AC*. Továbbá legyen az *AB* félegyenesnek *N* olyan pontja, hogy *B* az *A* és az *N* pont között található, valamint *MN* = *AC*. Ha az *NMB* szög nagysága 30°, akkor az alábbiak közül melyik lehet az *ABC* háromszög egyik szögének nagysága?

(A) *18°* **(B)** *34°* **(C)** *48°* **(D)** *66°* **(E)** *84°*

Megoldás: Készítsünk ábrát:



Jelölje az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögeit ($BCA\sphericalangle$ és $CAB\sphericalangle$) α. Ekkor az $AMC\sphericalangle$ nagysága szintén α, ebből $CAM\sphericalangle = 180° - 2\alpha$ és $MAB\sphericalangle = \alpha - (180° - 2\alpha) = 3\alpha - 180°$. Tudjuk, hogy $NMA\sphericalangle = 30° + BMA\sphericalangle = 30° + (180° - \alpha) = 210° - \alpha$ és $ANM\sphericalangle = MAN\sphericalangle = 3\alpha - 180°$. Az ANM háromszög belső szögösszege $180° = 2 \cdot (3\alpha - 180°) + 210° - \alpha$, ebből rendezés után azt kapjuk, hogy $330° = 5\alpha$, ahonnan $\alpha = 66°$, így az ABC háromszög szögeinek nagysága 66°, 66° és 48°.

Helyes válasz(ok): C, D

10. osztály

1. Andris egy kör kerületére írta az egész számokat 1-től 24-ig a következő sorrendben: 11, 1, 20, 5, 12, 21, 9, 14, 8, 22, 16, 7, 19, 3, 17, 23, 2, 15, 24, 10, 6, 13, 4, 18. Ebben a közvetlen szomszédok különbségei közül a legkisebb különbség 4 (mindig a nagyobból vonjuk ki a kisebbet). Más sorrendben felírva ezeket, az alábbiakból mennyi lehet a közvetlen szomszédok különbségei közül a legkisebb?

(A) *7* **(B)** *9* **(C)** *10* **(D)** *11* **(E)** *12*

Megoldás: Ebben a felírásban a legkisebb különbség két szomszédos szám között 11:
1, 13, 2, 14, 3, 15, 4, 16, 5, 17, 6, 18, 7, 19, 8, 20, 9, 21, 10, 22, 11, 23, 12, 24.
12 már nem lehet a legkisebb különbség. Ugyanis minden számnak két szomszédja van a körön, de a 12-nek ezzel a feltétellel csak a 24 lehetne szomszédja, más szám nem az adottak közül. Így 11 vagy annál kevesebb lehet.

Helyes válasz(ok): A, B, C, D

2. Az *MN* egyenesen egymástól egyenlő távolságra helyezkedik el harminc pont: $A_1, A_2, A_3, \ldots A_{30}$. Ezekből a pontokból harminc egyenes út indul ki az *MN* egyenes azonos partján. Az utak az *MN* egyenessel a következő szögeket zárják be:

A kezdőpontok sorszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Az út és az *MN* egyenes által bezárt szög fokban	60	30	15	20	155	45	10	35	140	50	125	65	85	86	80
A kezdőpontok sorszáma	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Az út és az *MN* egyenes által bezárt szög fokban	75	78	115	95	25	28	158	30	25	5	15	160	170	20	158

Mind a harminc pontból egyidőben indul el egy-egy autó, és azonos egyenletes sebességgel egyenesen halad ezeken az utakon. Minden kereszteződésben sorompó áll. Amikor az első autó áthalad a kereszteződésen, a sorompó lezárul és elzárja az utat a más irányból érkező autók előtt. Az autók közül mely pontokból indulnak azok, amelyek minden útjukba eső kereszteződésen áthaladnak?

(A) A_{11} **(B)** A_{14} **(C)** A_{23} **(D)** A_{24} **(E)** A_{30}

Megoldás: Jelöljük az A_n pontból kiinduló utat a_n-nel, azt a szöget, amelyet ez az út az *MN* félegyenessel bezár, α_n -nel és az a_m és a_n utak kereszteződését P_{mn}-nel. Az a_n úton haladó autót nevezzük röviden a_n-nek.

Ekkor:

I. Ha az a_n autó a P_{mn} kereszteződésen fennakad, akkor az α_n szög jobban megközelíti a 90°-ot, mint az α_m szög (az a_n út meredekebben halad, mint az a_m út).

II. Legyen $p < q$. Az a_p és a_q utak metszik egymást, ha $\alpha_p < \alpha_q$, és nem metszik egymást, ha $\alpha_p \geq \alpha_q$.

III. Ha az a_n utat metsző összes többi út az a_n-nél kevésbé meredek, akkor az a_n autó minden kereszteződésen áthalad. Ez az I.-ből következik.

IV. Legyen a_m a legmeredekebb azok közül az utak közül, amelyek metszik az a_n utat. Kimutatható, hogy ha a_m meredekebb, mint a_n akkor az a_m autó a P_{mn} pontnál előbb nem rekedhet meg. Valóban, tegyük fel, hogy az a_m autó megreked az A_mP_{mn} szakaszon levő P_{qm} kereszteződésél. Ekkor az I. értelmében a_q meredekebb, mint a_m, tehát a feltétel értelmében nem metszheti a_n-t. Bebizonyítjuk, hogy ez lehetetlen. Két esetet vizsgálunk meg:
   c) Az A_q pont az A_nA_m szakaszon kívül helyezkedik el. Ha a_q metszi az $A_nP_{mn}A_m$ háromszög A_mP_{mn} oldalát és nem metszi az A_nA_m oldalt, akkor ez az út feltétlenül metszi A_nP_{mn}-et. Következésképpen ez az eset nem lehetséges.
   d) Az A_q pont az A_nA_m szakaszon helyezkedik el. Tegyük fel először, hogy $n < q < m$. Abból, hogy az a_n és a_m, a_q és a_m útpárok metszik egymást és az a_n és az a_q útpár nem metszi egymást, a II. értelmében következik, hogy $\alpha_q \leq \alpha_n < \alpha_m$.
   Amennyiben α_m jobban megközelíti a 90°-ot, mint α_n, az $\alpha_n < \alpha_m$ egyenlőtlenség csak $\alpha_n < 90°$ esetén lehetséges. De akkor az $\alpha_q \leq \alpha_n$ egyenlőtlenségből következik, hogy a_q nem meredekebb, mint a_n, ami ellentmond a feltételnek. Analóg módon történik az $m < q < n$ eset vizsgálata is.

V. A IV. és I. pontokból következik, hogy ha az a_n autó áthalad minden kereszteződésen, akkor az a_n-t metsző összes többi út kevésbé meredek, mint a_n (a III. feltétel megfordítása).

A III. és V. pontokból most már megkaphatjuk a feladat megoldását. Mindenekelőtt világos, hogy a 30 út közül a legmeredekebb úton haladó autó, azaz a 14. nem reked meg sehol. Az összes többi autó, amely a 14. utat metsző utakon halad, azaz az 1., 2., 3., 4., 6., 7., 8., 10., 12., 13., 18., 19., 22., 27., 28., 30. megreked.
Az első 13 autó közül csak az 5.,9. és 11. maradt megvizsgálni. De e három útjának mindegyike metszi az első utat, amely meredekebb ezeknél, így az ezen az úton haladó autók szintén megrekednek.

A 16-30. autók közül a legmeredekebb úton a 19-es halad. A 15-18. utak metszik a két egymást metsző 14-es és 19-es utak egyikét; mivel ezek mindegyike kevésbé meredek, mint ez utóbbi kettő, így az ezeken az utakon haladó autók megrekednek.

A 20-30-as utak közül a legmeredekebben a 23-as út vezet. A 20-as és a 21-es út metszi a 23-ast, ezért ez a két autó szintén megreked. Továbbá a 24-30-as utak közül a legmeredekebb a 24-es. A 25-30-as utak közül a legmeredekebb a 30-as, amely metszi a kevésbé meredek 25-ös, 26-os és 29-es utakat. Mivel a 30-as út szintén metszi a 14-est, így a 14-es út kivételével csak a 23-as és 24-es nem metszi a meredekebb utakat.

Tehát csak a 14-es, 23-as és a 24-es autókat nem fogják sehol sem feltartóztatni a sorompók.

Helyes válasz(ok): B, C, D

3. Egy játéktáblán körben 12 mező helyezkedik el. Négy szomszédos mezőn négy különböző színű figura áll ebben a sorrendben: piros, sárga, zöld, kék. Kezdőbetűik segítségével ezt a sorrendet így jelöljük: *PSZK*.

Bármely figura léphet bármely irányban az ötödik mezőre, tehát négy mezőt átugorva, feltéve, hogy szabad az a mező, amelyre lépni akar. Bizonyos számú lépés után a figurák ismét azon a négy mezőn állnak csak más sorrendben. Az alábbiakból mi lehet most a sorrend?

(A) *ZKSP* **(B)** *SPKZ* **(C)** *KZSP* **(D)** *ZSKP* **(E)** *SKPZ*

Megoldás: Változtassuk meg a mezők sorrendjét! Rendezzük el a mezőket úgy, hogy azok kerüljenek egymás mellé, amelyekből egy lépéssel átléphetünk a másikba. Az első mező után tegyük tehát a hatodikat, ezután a tizenegyediket, majd a negyediket, stb. Az átrendezett táblát a következő vázlattal szemléltethetjük:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
P & & & & & & K & & & & S \\
2 & \leftrightarrow & 6 & \leftrightarrow & 11 & \leftrightarrow & 4 & \leftrightarrow & 9 & \leftrightarrow & 2 \\
\updownarrow & & & & & & & & & & \updownarrow \\
8 & \leftrightarrow & 3 & \leftrightarrow & 10 & \leftrightarrow & 5 & \leftrightarrow & 12 & \leftrightarrow & 7 \\
 & & Z & & & & & & & &
\end{array}$$

A mezők eredeti sorrendjének gyakorlatilag nincs jelentősége, csak a számozás sorrendjével jelöljük, hogy milyen kapcsolat van a vázlatunk és az eredeti tábla között. A figurák eredeti helyzetét a mezők mellé írt betűkkel jelöltük. A lépésszabály ezen az új táblán egészen egyszerű: minden figura egyet léphet a szomszédos mezőre, ha az illető mező nincs foglalva. Világos, hogy a figurák csak úgy cserélhetnek helyet, ha mindnyájan ugyanabban az irányban haladnak az új játéktáblán. Egyik sem előzheti meg ezen a másikat, hiszen ez azt jelentené, hogy olyan mezőn kellene áthaladnia, amelyen valamilyen más figura áll, s ez elállja az útját.

Ha tehát a *P* a 4-es mezőt foglalja el, akkor az eredetileg a 4-es mezőn álló *K* figurának a 2-es mezőt kell elfoglalnia, az *S*-nek a 3-ast, a *Z*-nek az 1-est.
Tehát a *ZKSP* sorrend lehetséges, vagyis (A) helyes válasz.
Ha *P* a 2-es mezőt foglalja el, akkor csakis az *SPKZ* sorrend a helyes, ha pedig *P* a 3-as mezőre kerül, akkor csakis a *KZPS* sorrend lehetséges. Így (B) jó válasz míg a (C) nem. Semmilyen más csere nem lehetséges, ezért (D), (E) válaszok hibásak.

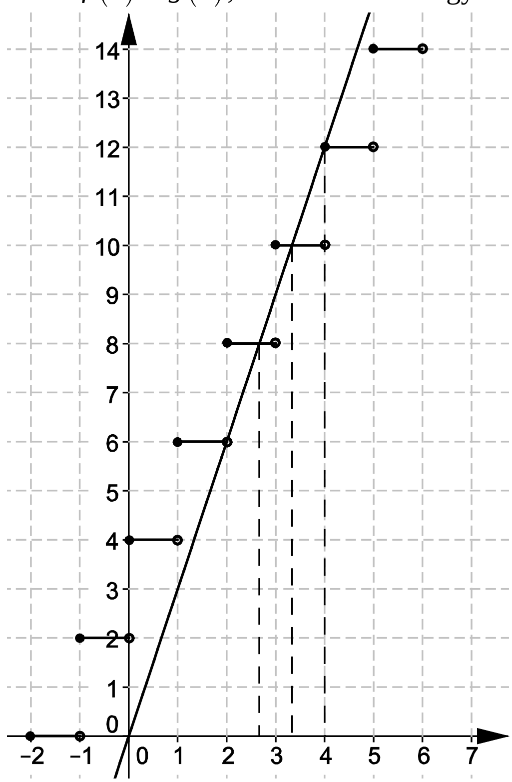
Helyes válasz(ok): A, B

4. Összesen hány különböző *x* valós számra teljesül, hogy $2[x+2]=3x$?

($[a]$ az *a* egészrészét, vagyis az *a*-nál nem nagyobb egész számok közül a legnagyobbat jelöli.)

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *5*

1. megoldás: Keressük a megoldást grafikus úton! Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben az $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2[x+2]$ és $g(x)=3x$ függvényeket. Amely *x* értékekre $f(x)=g(x)$, azok lesznek az egyenlet megoldásai.



Az ábrán *f* grafikonja a lépcsős függvény, míg *g* grafikonja a lineáris függvény. Leolvashatjuk, hogy a 2-nél kisebb *x* értékekre *f* nagyobb *g*-nél, míg a 4-nél nagyobb *x* értékekre *g* nagyobb *f*-nél.

Mivel $f(2)=2\cdot[2+2]=8$ és $g(2)=3\cdot 2=6$, tehát $f(2)\neq g(2)$, vagyis $x=2$ nem megoldás. Viszont $f(4)=2\cdot[4+2]=12$ és $g(4)=3\cdot 4=12$, tehát $f(4)=g(4)$, vagyis $x=4$ megoldás.
Leolvasható még az ábráról, hogy 2 és 3 között, valamint 3 és 4 között is van egy-egy további megoldás, vagyis összesen 3 megoldása van az egyenletnek. (számítással igazolható, hogy a másik két megoldás $x=\frac{8}{3}$ és $x=\frac{10}{3}$).

2. megoldás: Ha *x* értéke egész, akkor $[x+2]=x+2$, így az eredeti egyenlet átírható $2(x+2)=3x$ alakba, amelynek megoldása $x=4$. Ha *x* értéke nem egész, akkor, mivel a $2[x+2]=3x$ egyenlet bal oldala egész, a jobb oldalon $3x$-nek is egésznek kell lennie, ami csak úgy lehetséges, ha $x=y+\frac{1}{3}$ vagy $x=y+\frac{2}{3}$, ahol *y* egész szám. Az $x=y+\frac{1}{3}$ esetben az eredeti egyenletből a $2\left[y+\frac{1}{3}+3\right]=3\left(y+\frac{1}{3}\right)$, vagyis $2(y+2)=3y+1$ egyenletet kapjuk, amelynek megoldása $y=3$, így $x=3\frac{1}{3}$. Az $x=y+\frac{2}{3}$ esetben az eredeti egyenletből a $2\left[y+\frac{2}{3}+2\right]=3\left(y+\frac{2}{3}\right)$, vagyis $2(y+2)=3y+2$ egyenletet kapjuk, amelynek megoldása $y=2$, így $x=2\frac{2}{3}$. Tehát az eredeti egyenletnek 3 megoldása van.

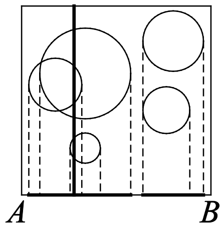
Helyes válasz(ok): C

5. Egy 1 egység oldalú négyzetbe belerajzoltunk néhány kört, amelyek kerületeinek összege 10 egység (a körök nem lógnak ki a négyzetből). Ekkor bárhogyan vettük fel a köröket, az ábrára biztosan rajzolhatunk olyan egyenest, amely a körök közül pontosan *n* darabot metsz. Az alábbiak közül mennyi lehet *n* értéke ahhoz, hogy igaz legyen az előző mondat állítása?

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*

Megoldás: Mivel az 1 egység oldalú négyzetbe rajzolható legnagyobb kerületű kör sugara $\frac{1}{2}$, így biztosan 3-nál több kört kellett felvenni ahhoz, hogy kerületeik összege 10 egység legyen (ugyanis három darab $\frac{1}{2}$ sugarú kör kerülete még csak $3\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}=3\pi<10$ lenne).

Először megmutatjuk, hogy bárhogy is vettük fel a köröket, biztosan rajzolható az ábrára olyan egyenes, amelyik legalább 4 kört metsz ezek közül.



Tegyük fel, hogy nem létezik olyan egyenes, amelyik 4-et metszene a négyzetbe rajzolt körök közül. Vetítsük le merőlegesen a négyzetben lévő összes kört a négyzet egyik oldalára, mondjuk *AB*-re. Ekkor az *AB* oldal minden pontjára legfeljebb három kör vetülete eshet (hiszen ha valamelyik pontra háromnál több kör vetülete is esne, akkor az ezen a ponton áthaladó, *AB*-re merőleges egyenes háromnál több kört metszene). Ebből következik, hogy a vetületek együttes hossza, vagyis a körök átmérőinek összege nem több 3 egységnél, és így a körök kerületeinek összege nem haladhatja meg a 3π-t. De tudjuk, hogy $3\pi < 10$, viszont a körök kerületeinek összege 10, így ellentmondásra jutottunk. Tehát biztosan rajzolható az ábrára olyan egyenes, amelyik legalább 4 kört metsz.

Mivel elképzelhető, hogy a négyzetbe rajzolt körök száma nem feltétlenül nagyobb 4-nél (hiszen például 4 darab $\frac{2,5}{2\pi} \approx 0,398$ egység sugarú kör már teljesíti a kerületösszegre vonatkozó feltételt), ezért 4-nél több kört metsző egyenest már nem biztos, hogy rajzolhatunk az ábrára.

Helyes válasz(ok): A, B, C

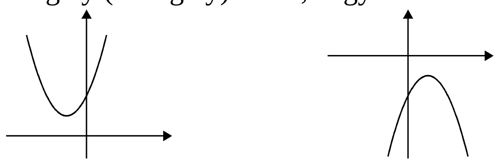
11. osztály

1. Ha $a+b+c>0$, és az $ax^2+bx+c=0$ egyenletnek nincs valós gyöke, akkor

(A) $a-b+c<0$ **(B)** $a-b+c>0$ **(C)** $4a-2b+c<0$

(D) $4a-2b+c>0$ **(E)** $c>0$

Megoldás: Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$ másodfokú függvényt (ha $a\neq 0$). Mivel az $ax^2+bx+c=0$ egyenletnek nincs valós gyöke, ezért az *f* függvénynek nincs zérushelye, tehát *f* grafikonja teljes egészében vagy az abszcisszatengely (*x* tengely) fölött, vagy az alatt helyezkedik el:



Mivel azonban $f(1)=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b+c>0$, ezért a kétféle grafikon közül csak az első (az előző ábrák közül a bal oldali) jöhet szóba, vagyis minden lehetséges *x* esetén az *f* függvény pozitív értéket vesz fel.
Emiatt

$$f(-1)=a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=a-b+c>0,$$

$$f(-2)=a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c=4a-2b+c>0 \text{ és}$$

$$f(0)=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=c>0.$$

Ha $a=0$, akkor a $bx+c=0$ egyenletnek csak úgy nincs valós gyöke, ha $b=0$ és $c\neq 0$. Ekkor $a+b+c>0$ miatt $c>0$, így az öt válaszlehetőség közül ismét ugyanaz a három teljesül, mint a korábban vizsgált $a\neq 0$ esetén.)

Helyes válasz(ok): B, D, E

2. Egy játéktáblán körben 12 mező helyezkedik el. Négy szomszédos mezőn négy különböző színű figura áll ebben a sorrendben: piros, sárga, zöld, kék. Kezdőbetűik segítségével ezt a sorrendet így jelöljük: *PSZK*.
Bármely figura léphet bármely irányban az ötödik mezőre, tehát négy mezőt átugorva, feltéve, hogy szabad az a mező, amelyre lépni akar. Bizonyos számú lépés után a figurák ismét azon a négy mezőn állnak csak más sorrendben. Az alábbiakból mi lehet most a sorrend?

(A) *ZKSP* **(B)** *SPKZ* **(C)** *KZSP* **(D)** *ZSKP* **(E)** *SKPZ*

Megoldás: Változtassuk meg a mezők sorrendjét! Rendezzük el a mezőket úgy, hogy azok kerüljenek egymás mellé, amelyekből egy lépéssel átléphetünk a másikba. Az első mező után tegyük tehát a hatodikat, ezután a tizenegyediket, majd a negyediket, stb. Az átrendezett táblát a következő vázlattal szemléltethetjük:

$$\begin{array}{ccccccccccc} P & & & & & & K & & & & S \\ 3 & \leftrightarrow & 6 & \leftrightarrow & 11 & \leftrightarrow & 4 & \leftrightarrow & 9 & \leftrightarrow & 2 \\ \updownarrow & & & & & & & & & & \updownarrow \\ 8 & \leftrightarrow & 3 & \leftrightarrow & 10 & \leftrightarrow & 5 & \leftrightarrow & 12 & \leftrightarrow & 7 \\ & & Z & & & & & & & & \end{array}$$

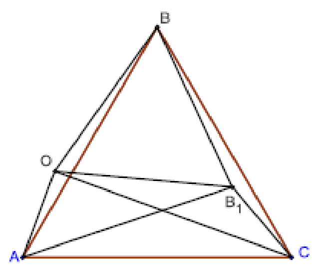
A mezők eredeti sorrendjének gyakorlatilag nincs jelentősége, csak a számozás sorrendjével jelöljük, hogy milyen kapcsolat van a vázlatunk és az eredeti tábla között. A figurák eredeti helyzetét a mezők mellé írt betűkkel jelöltük. A lépésszabály ezen az új táblán egészen egyszerű: minden figura egyet léphet a szomszédos mezőre, ha az illető mező nincs foglalva. Világos, hogy a figurák csak úgy cserélhetnek helyet, ha mindnyájan ugyanabban az irányban haladnak az új játéktáblán. Egyik sem előzheti meg ezen a másikat, hiszen ez azt jelentené, hogy olyan mezőn kellene áthaladnia, amelyen valamilyen más figura áll, s ez elállja az útját.
Ha tehát a *P* a 4-es mezőt foglalja el, akkor az eredetileg a 4-es mezőn álló *K* figurának a 2-es mezőt kell elfoglalnia, az *S*-nek a 3-ast, a *Z*-nek az 1-est.
Tehát a *ZKSP* sorrend lehetséges, vagyis (A) helyes válasz.
Ha *P* a 2-es mezőt foglalja el, akkor csakis az *SPKZ* sorrend a helyes, ha pedig *P* a 3-as mezőre kerül, akkor csakis a *KZPS* sorrend lehetséges. Így (B) jó válasz míg a (C) nem. Semmilyen más csere nem lehetséges, ezért (D), (E) válaszok hibásak.

Helyes válasz(ok): A, B

3. Az *ABC* szabályos háromszög síkjában *O* olyan pont, melyre $AOC\sphericalangle = 90°$ és $BOC\sphericalangle = 75°$. Az alábbiakból hány fokos lehet egy az *AO*, *BO* és *CO* oldalhosszakkal rendelkező háromszögnek valamelyik belső szöge?

(A) *15°* **(B)** *30°* **(C)** *45°* **(D)** *120°* **(E)** *135°*

Megoldás: Legyen B_1 az *O*-nak *B* körüli 60°-kal való elforgatása. Ebből következik, hogy BOB_1 háromszög minden szöge 60°-os és oldalai egyformák.



Mivel *C* az *A*-nak *B* körüli 60°-kal való elforgatása, ezért BB_1C háromszög a *BOA* háromszögnek *B* körüli 60°-kal való elforgatása. Mindebből adódik, hogy $B_1C = OA$. Ugyanakkor $OB_1 = OB$ és így az *OA*, *OB*, *OC* oldalhosszakkal rendelkező háromszög éppen az OB_1C háromszög. Tehát ennek kell megállapítsuk mekkorák a belső szögei.

$B_1OC\sphericalangle = BOC\sphericalangle - B_1OC\sphericalangle = 75° - 60° = 15°$;

$BB_1C = BOA\sphericalangle = BOC\sphericalangle + COA\sphericalangle = 75° + 90° = 165°$.

$OB_1C\sphericalangle = 360° - (OB_1B\sphericalangle + BB_1C\sphericalangle) = 360° - (60° + 165°) = 135°$.

$$B_1CO\sphericalangle = 180° - (OB_1C\sphericalangle + B_1OC\sphericalangle) = 180° - (135° + 15°) = 30°$$

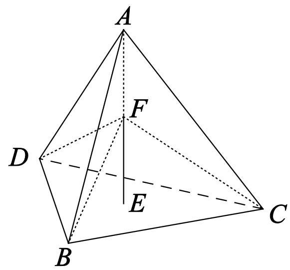
Helyes válasz(ok): A, B, E

4. Ha egy *ABCD* szabályos tetraéder *A* csúcsából induló magasságának felezőpontja *F*, akkor az *FAB*, *FBC* és *FCA* háromszögek mindegyike …

(A) *hegyesszögű.* **(B)** *derékszögű.* **(C)** *tompaszögű.*

(D) *egyenlő szárú.* **(E)** *szabályos.*

Megoldás: Válasszuk a tetraéder élének hosszát 1 egységnek, továbbá legyen az *A* csúcsból induló magasság talppontja (a *BCD* lapon) az *E* pont. Mivel az 1 egység oldalhosszú szabályos háromszög magasságának hossza $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (amely egyben súlyvonal is), továbbá az *E* pont egybeesik a *BCD* alaplap súlypontjával (amely harmadolja a súlyvonalakat), ezért $BE = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Így



$AE^2 = AB^2 - BE^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, ahonnan $AE = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ és $EF = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Továbbá $FB^2 = BE^2 + EF^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

A szimmetria miatt $FB = FC = FD = \frac{1}{\sqrt{2}}$, valamint $FA = EF = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Az *FBC* háromszögben teljesül, hogy $FB^2 + FC^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = BC^2$, ez a háromszög tehát derékszögű és egyenlő szárú. Viszont az *FAB* háromszögben $FA^2 + FB^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} < 1 = AB^2$, így ez a háromszög tompaszögű, nem egyenlő szárú (ugyanez elmondható az *FCA* háromszögről is).
Vagyis egyik válaszlehetőség sem teljesül a megadott három háromszög mindegyikére, így semelyik válaszlehetőség nem helyes.

Helyes válasz(ok): -

5. Adott a síkban 5 különböző pont, amelyek közül semelyik három nem esik egy egyenesre, és semelyik négy nem esik egy körre. Vizsgáljuk az ezen 5 ponttal, mint csúcspontokkal meghatározható háromszögeket. Összesen hány háromszög alkotható a vizsgált háromszögek köré írt körök középpontjaiból? (Mindkét esetben a háromszögek mindhárom csúcsának a megadott pontok közül valónak kell lennie.)

(A) *10* **(B)** *20* **(C)** *100* **(D)** *110* **(E)** *120*

Megoldás: Az 5 különböző pont $C_5^3 = \binom{5}{3} = 10$ különböző háromszöget határoz meg. A feladat tehát az, hogy megállapítsuk, hány háromszöget alkothatunk e 10 háromszög köré írt körök középpontjaiból.
Ha e középpontok közül semelyik három nem esne egy egyenesre, akkor a szerkeszthető háromszögek száma nyilvánvalóan $C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ lenne.
Válasszunk ki az eredeti 5 pont közül kettőt, *A*-t és *B*-t. Ekkor az eredeti háromszögek között 3 olyan létezik, amely tartalmazza az *AB* oldalt (ennek csúcsai *A*, *B* és a maradék három pont valamelyike). Ezen háromszögek köré írható mindhárom kör középpontja az *AB* felezőmerőlegesén lesz, tehát egy egyenesre esnek. (Az a feltétel, hogy semelyik négy pont nem esik egy körre, biztosítja, hogy az előbb említett 3 kör középpontjai páronként különbözők.) Tehát az *AB*-t mint oldalt tartalmazó háromszögek esetén a körök középpontjai között egyetlen olyan ponthármas van, amely nem határoz meg háromszöget, mert a három pont kollineáris.
Ugyanez elmondható *AB* helyett bármelyik két eredeti pontra. Mivel az 5 eredeti pont közül kettőt $C_5^2 = 10$ -féleképpen választhatunk ki, és minden kiválasztott 2 pont esetén egyetlen olyan ponthármas van a körközéppontok között, amely nem határoz meg háromszöget, ezért a keresett háromszögek száma $120 - 10 = 110$.

Helyes válasz(ok): D

12. osztály

1. Egy játéktáblán körben 12 mező helyezkedik el. Négy szomszédos mezőn négy különböző színű figura áll ebben a sorrendben: piros, sárga, zöld, kék. Kezdőbetűik segítségével ezt a sorrendet így jelöljük: *PSZK*.
Bármely figura léphet bármely irányban az ötödik mezőre, tehát négy mezőt átugorva, feltéve, hogy szabad az a mező, amelyre lépni akar. Bizonyos számú lépés után a figurák ismét azon a négy mezőn állnak csak más sorrendben. Az alábbiakból mi lehet most a sorrend?

(A) *ZKSP* **(B)** *SPKZ* **(C)** *KZSP* **(D)** *ZSKP* **(E)** *SKPZ*

Megoldás: Változtassuk meg a mezők sorrendjét! Rendezzük el a mezőket úgy, hogy azok kerüljenek egymás mellé, amelyekből egy lépéssel átléphetünk a másikba. Az első mező után tegyük tehát a hatodikat, ezután a tizenegyediket, majd a negyediket, stb. Az átrendezett táblát a következő vázlattal szemléltethetjük:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
P & & & & & & K & & & & S \\
4 & \leftrightarrow & 6 & \leftrightarrow & 11 & \leftrightarrow & 4 & \leftrightarrow & 9 & \leftrightarrow & 2 \\
\updownarrow & & & & & & & & & & \updownarrow \\
8 & \leftrightarrow & 3 & \leftrightarrow & 10 & \leftrightarrow & 5 & \leftrightarrow & 12 & \leftrightarrow & 7 \\
 & & Z & & & & & & & &
\end{array}
$$

A mezők eredeti sorrendjének gyakorlatilag nincs jelentősége, csak a számozás sorrendjével jelöljük, hogy milyen kapcsolat van a vázlatunk és az eredeti tábla között. A figurák eredeti helyzetét a mezők mellé írt betűkkel jelöltük. A lépésszabály ezen az új táblán egészen egyszerű: minden figura egyet léphet a szomszédos mezőre, ha az illető mező nincs foglalva. Világos, hogy a figurák csak úgy cserélhetnek helyet, ha mindnyájan ugyanabban az irányban haladnak az új játéktáblán. Egyik sem előzheti meg ezen a másikat, hiszen ez azt jelentené, hogy olyan mezőn kellene áthaladnia, amelyen valamilyen más figura áll, s ez elállja az útját.
Ha tehát a *P* a 4-es mezőt foglalja el, akkor az eredetileg a 4-es mezőn álló *K* figurának a 2-es mezőt kell elfoglalnia, az *S*-nek a 3-ast, a *Z*-nek az 1-est.
Tehát a *ZKSP* sorrend lehetséges, vagyis (A) helyes válasz.
Ha *P* a 2-es mezőt foglalja el, akkor csakis az *SPKZ* sorrend a helyes, ha pedig *P* a 3-as mezőre kerül, akkor csakis a *KZPS* sorrend lehetséges. Így (B) jó válasz míg a (C) nem. Semmilyen más csere nem lehetséges, ezért (D), (E) válaszok hibásak.

Helyes válasz(ok): A, B

2. Ábel felírt a táblára néhány különböző egész számot, és ezekre igaz, hogy bármely két különböző szám összege vagy prímszám vagy 2-hatvány. Hány számot írhatott a táblára?
Prímszámnak hívjuk azokat a pozitív egészeket, amelyeknek pontosan két osztójuk van (ilyen pl. a 2, a 7, a 11 vagy a 37); 2 hatványnak hívjuk azokat a pozitív egészeket, amelyek felírhatók 2 valamely hatványaként (ilyen pl. a $8=2^3$, a $32=2^5$, vagy $64=2^6$).

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *6* **(E)** *7*

Megoldás: Öt számot felírhat (ezért négyet vagy hármat is: az öt számból egy vagy két számot elhagyja): -1, 2, 3, 5, 14.
Ha hat számot írna fel, abban nem lehetne két nem pozitív szám, mivel azok összege negatív volna, ami nem volna 2 hatvány. Tehát ha felírhatna hat egész számot, akkor abból ötnek pozitívnak kellene lennie.
Ez viszont az alábbiak miatt nem fordulhatna elő. Az öt pozitív szám között ugyanis van három páros, vagy három páratlan. Ha ezek $a<b<c$, a három szám közül bármely kettő összege páros, ezért 2-hatvány.
Így ha $a+b=2^n$, $a+c=2^m$, akkor $2^m<b+c<2^m+2^n<2^{m+1}$, tehát $b+c$ nem lesz 2-hatvány.
Az utóbbi állítás következő érveléssel is indokolható. A három számból készíthető páronkénti összegek mindegyike nem lehet 2-hatvány. Ugyanis az $a+b, b+c, c+a$ számokból háromszög szerkeszthető, de egy háromszög mindhárom oldala nem lehet 2-hatvány. Így a helyes válasz (A), (B), (C).

Helyes válasz(ok): A, B, C

3. Adott az a_n sorozat a következőképpen: minden n természetes számra $a_{n+5}+a_{n+1}=a_{n+4}+a_n$. és ha $1\le n\le 5$, akkor $a_n=n^2$. Mennyi lehet a_{2021}?

(A) *4* **(B)** *16* **(C)** *17* **(D)** *22* **(E)** *Előzőekből egyik sem.*

Megoldás: Mivel $a_{n+4}+a_n=a_{n+3}+a_{n-1}=...=a_5+a_1=25+1=26$, így $a_n=26-a_{n+4}=26-\left(26-a_{n+8}\right)=a_{n+8}$, vagyis a sorozat minden nyolcadik tagja azonos.
2021-nek 8-cal való osztási maradéka 5, ezért $a_{2021}=a_5=5^2=25$.

Helyes válasz(ok): E

4. Egészszám-oldalúnak mondunk egy háromszöget, ha oldalai hosszának mértékszáma egész szám. Maximum hány olyan egészszám-oldalú háromszög adható meg, amelynél a kerület és a terület mértékszáma megegyezik? (Tudjuk, hogy ha egy háromszög oldalhosszai *a, b, c* és *p* a félkerülete, akkor ennek a háromszögnek a területe $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$)

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *5-nél több*

Megoldás: Ha *a*, *b*, *c* a háromszög oldalai és *p* a félkerület, akkor Heron képlete segítségével a feladat feltételei alapján:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 2p .$$

Ha bevezetjük a $p-a=x$, $p-b=y$, $p-c=z$ jelöléseket, akkor az egyenlet

$$\sqrt{(x+y+z)xyz} = 2(x+y+z) ,$$

amit mindkét oldalt négyzetre emelve kapjuk, hogy

$$xyz = 4(x+y+z) ,$$

ahol *x*, *y*, *z* vagy pozitív egész számokkal, vagy páratlan egész számok felével egyenlők. A második eset azonban nem lehetséges, minthogy ekkor az egyenlőség bal oldalán tört szám, a jobb oldalán pedig egész szám állna. Így tehát *x*, *y*, *z* egész számok.

Legyen $x \geq y \geq z$. A fenti egyenlőségből kapjuk, hogy

$$x = \frac{4y+z}{yz-4} ,$$

amiből következik, hogy

$$\frac{4y+z}{yz-4} \geq y .$$

Ez utóbbi egyenlőtlenséget megszorozhatjuk ($yz - 4$)-gyel (mivel ez pozitív, különben *x* negatív lenne) és *y*-ra vonatkozóan másodfokú egyenlőtlenségnek tekinthetjük:

$$y^2z - 8y - 4z \leq 0 \text{, azaz } (y-y_1)(y-y_2) \leq 0 , \qquad (*)$$

ahol y_1 és y_2 a $zy^2 - 8y - 4z = 0$ egyenlet *z*-től függő gyökei:

$$y_1 = \frac{4+\sqrt{16+4z^2}}{z}, \quad y_2 = \frac{4-\sqrt{16+4z^2}}{z} .$$

De y_2 negatív, amiből az következik, hogy $y - y_2 > 0$ (mert *y* pozitív); következésképpen ahhoz, hogy a (∗) egyenlőtlenség teljesüljön, a következő feltételek szükségesek:

$$y - y_1 \leq 0 , \quad y \leq \frac{4+\sqrt{16+4z^2}}{z} .$$

Ebből azt kapjuk, hogy $yz \leq 4 + \sqrt{16+4z^2}$, amiből $z^2 - 4 \leq \sqrt{16+4z^2}$ is következik, (mert $z \leq y$). Emeljük mindkét oldalt négyzetre és akkor azt kapjuk, hogy

$$z^4 - 8z^2 + 16 \leq 16 + 4z^2 \Leftrightarrow z^4 \leq 12z^2$$

ami nyilvánvalóan csak $z \leq 3$ esetén teljesül.

Nézzük meg a lehetséges eseteket:

I. Ha $z=1$, akkor $y \le \frac{4+\sqrt{16+4}}{1} < 9$, $x = \frac{4y+4z}{yz-4} = \frac{4y+4}{y-4}$ csak abban az esetben lesz pozitív szám, ha $y=5$ (ebben az esetben $x=24$), $y=6$ (ebben az esetben $x=14$), $y=8$ (ebben az esetben $x=9$).

II. $z=2$, akkor $y \le \frac{4+\sqrt{16+4\cdot 4}}{2} < 5$, $x = \frac{4y+4z}{yz-4} = \frac{4y+8}{2y-4}$ csak abban az esetben lesz egész és *y*-nál nem kisebb, ha $y=3$ (ebben az esetben $x=10$), vagy $y=4$ (ebben az esetben $x=6$).

III. $z=3$, akkor $y \le \frac{4+\sqrt{16+4\cdot 9}}{3} < 4$, $z=y=3$-nál $x = \frac{4y+4z}{yz-4}$ nem lesz egész szám.

Így a feladatnak a következő öt megoldását kaptuk:

x	*y*	*z*	*x*+*y*+*z*=*p*	*a*	*b*	*c*
24	5	1	30	6	25	29
14	6	1	21	7	15	20
9	8	1	18	9	10	17
10	3	2	15	5	12	13
6	4	2	12	6	8	10

Helyes válasz(ok): D

5. Adott a síkban 6 különböző pont, amelyek közül semelyik három nem esik egy egyenesre, és semelyik négy nem esik egy körre. Vizsgáljuk az ezen 6 ponttal mint csúcspontokkal meghatározható háromszögeket. Összesen hány háromszög alkotható a vizsgált háromszögek köré írt körök középpontjaiból? (Mindkét esetben a háromszögek mindhárom csúcsának a megadott pontok közül valónak kell lennie.)

(A) *1024* **(B)** *1080* **(C)** *1110* **(D)** *1125* **(E)** *1140*

Megoldás: A 6 különböző pont $C_6^3 = \binom{6}{3} = 20$ különböző háromszöget határoz meg. A feladat tehát az, hogy megállapítsuk, hány háromszöget alkothatunk e 20 háromszög köré írt körök középpontjaiból.
Ha e középpontok közül semelyik három nem esne egy egyenesre, akkor a szerkeszthető háromszögek száma nyilvánvalóan $C_{20}^3 = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{3\cdot 2\cdot 1} = 1140$ lenne.
Válasszunk ki az eredeti hat pont közül kettőt, *A*-t és *B*-t. Ekkor az eredeti háromszögek között 4 olyan létezik, amely tartalmazza az *AB* oldalt (ennek csúcsai *A*, *B* és a maradék négy pont valamelyike). Ezen háromszögek köré írható mind a négy kör középpontja az *AB* felezőmerőlegesén lesz, tehát egy egyenesre esnek. (Az a feltétel, hogy semelyik négy pont nem esik egy körre, biztosítja, hogy az előbb említett 4 kör középpontjai páronként különbözők.) Te-

hát az *AB*-t mint oldalt tartalmazó háromszögek esetén a körök 4 középpontja között $C_4^3 = 4$ olyan ponthármas van, amely nem határoz meg háromszöget, mert a három pont kollineáris.
Ugyanez elmondható *AB* helyett bármelyik két eredeti pontra. Mivel a 6 eredeti pont közül kettőt $C_6^2 = 15$ -féleképpen választhatunk ki, és minden kiválasztott 2 pont esetén 4 olyan ponthármas van a körközéppontok között, amely nem határoz meg háromszöget, ezért a keresett háromszögek száma az összes lehetőségnél $15 \cdot 4 = 60$ -nal kevesebb, vagyis $1140 - 60 = 1080$.

Helyes válasz(ok): B