5. osztály

1. Ábel az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokat olyan sorrendben írta fel, hogy bármelyik két egymás után írt szám közt vagy 2 lett a különbség, vagy az egyik kétszerese lett a másiknak. Az alábbiakból melyik kerülhetett a sorban negyedik helyre?

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *8* **(E)** *10*

Megoldás: Módszeres próbálkozással csak az alábbi hat eltérő lehetőséget kapjuk.

9, 7, 5, **3**, 1, 2, 4, 6, 8, 10 9, 7, 5, **10**, 8, 6, 4, 2, 1, 3

9, 7, 5, **10**, 8, 4, 2, 1, 3, 6

vagy a fordított sorrendben

10, 8, 6, **4**, 2, 1, 3, 5, 7, 9 3, 1, 2, **4**, 6, 8, 10, 5, 7, 9.

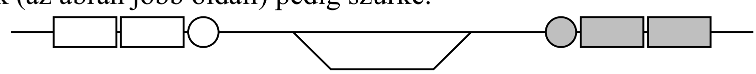
6, 3, 1, **2**, 4, 8, 10, 5, 7, 9

Helyes válasz(ok): A, B, C, E

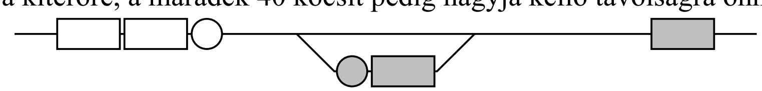
2. Két, egyenként egy mozdonyból és 80 egyforma kocsiból álló vonat találkozik egyetlen egyenes vágányon, egymással szemben haladva. A két vonatnak ki kell kerülnie egymást. Adott még egyetlen kitérő, amelynek segítségével a feladat megoldható, és amelyen éppen elfér 1 mozdony és x kocsi (de több már nem). Az alábbiak közül mennyi lehet *x* értéke? (Mozdony elejére és végére is lehet kocsit kapcsolni.)

(A) *40* **(B)** *44* **(C)** *50* **(D)** *60* **(E)** *70*

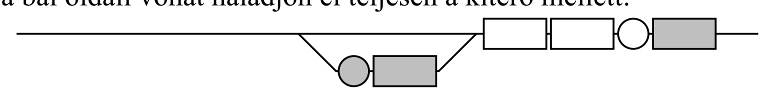
Megoldás: Megmutatjuk, hogy ha a kitérőn 40 kocsi elfér egy mozdony mögött, már akkor is kikerülhetik egymást a vonatok. (Ekkor természetesen 40-nél több kocsis kitérő esetén is lehetséges a kikerülés.)
A következő ábrákon a mozdonyokat körökkel, 40 szomszédos kocsit pedig téglalapokkal jelölünk. Az egyik szerelvény (az ábrán bal oldali) fehér színű, a másik (az ábrán jobb oldali) pedig szürke.



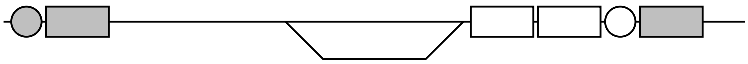
Először a jobb oldali vonat első fele, vagyis 40 kocsi a mozdonnyal együtt álljon be a kitérőre, a maradék 40 kocsit pedig hagyja kellő távolságra onnan:



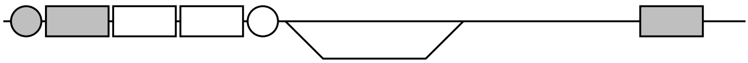
Utána a bal oldali vonat haladjon el teljesen a kitérő mellett:



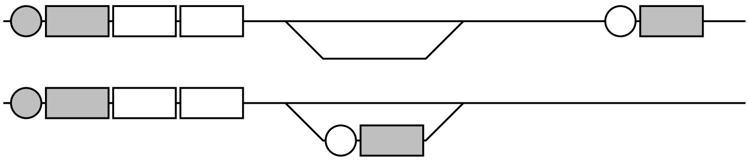
Ezután a kitérőn álló vonat menjen tovább balra, kellően messze a kitérőtől:



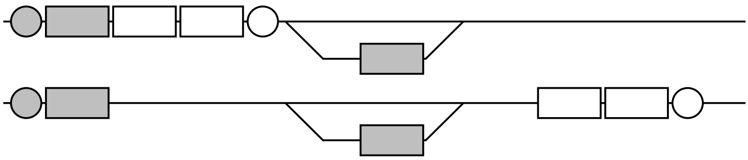
Most a jobb oldalt álló fehér vonat tolasson vissza a kitérő bal oldalára:



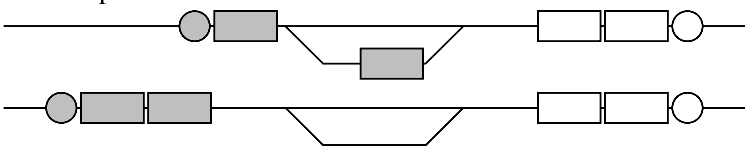
Ezt követően a fehér mozdony behúzhatja a kitérőre a jobb oldali 40 kocsit:



Most a fehér mozdony visszaállhat a fehér kocsik elé, és ezeket jobbra viheti:



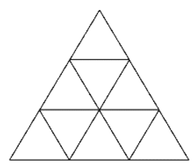
Végül a szürke mozdony visszatolatva felveheti a kitérőn álló kocsikat, és ezekkel összekapcsolódva balra indulhat:



Tehát x értéke 40, 44, 50, 60, illetve 70 is lehet

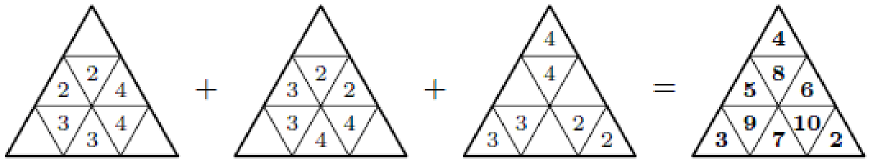
Helyes válasz(ok): A, B, C, D, E

3. Az itt látható kilenc kis háromszögből álló alakzat háromszögeibe nullákat írtunk. Ezután egy-egy lépésben kiválasztottunk két számot, amelyeket tartalmazó háromszögeknek van közös oldala, és mindkét számot 1-gyel növeltük. Ilyen lépésekkel eljutottunk egy olyan kitöltéshez, amikor a háromszögekben kilenc egymást követő 0-nál nagyobb szám állt. Mennyi lehet ezekben a háromszögekben a lehetséges legkisebb szám értéke?



(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *5*

Megoldás: Egy-egy lépésben a kilenc háromszögben álló számok összege 2-vel nőtt, ezért ez az összeg mindig páros. Így ilyen lépésekkel nem érhető el az, hogy a kilenc szám 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 legyen, hiszen ezek összege 45, azaz páratlan.
A következő lehetőség az, hogy a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számok állnak a táblázatban. Ez a kitöltés elérhető.
Az ábrákon látjuk, hogy két-két szomszédos háromszögben milyen növeléseket végeztünk.

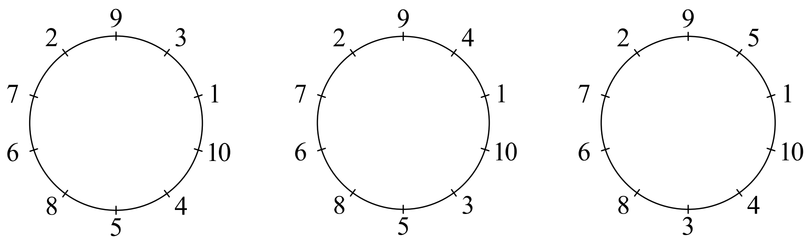


Helyes válasz(ok): B

4. Jani egy kör kerületére felírta az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokat valamilyen sorrendben, majd kiszámolta az összes lehetséges módon három szomszédos szám összegét. Az alábbiakból melyik számra igaz, hogy egy adott sorrend esetén az így kiszámolt tíz összeg közül lehet a legkisebb?

(A) *13* **(B)** *14* **(C)** *15* **(D)** *16* **(E)** *17*

Megoldás: A következő példák mutatják, hogy a legkisebb összeg értéke lehet 13, 14, illetve 15:

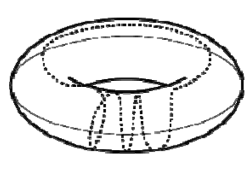


$9+3+1=13$ $9+4+1=14$ $9+5+1=15$

A legkisebb összeg nem lehet 15-nél nagyobb. Válasszuk ugyanis külön a 10-et, a többi 9 számot pedig osszuk hármas szomszédonként 3 csoportba. E 3 csoportban a számok összege $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45=3\cdot 15$. Ha a legkisebb három szomszédos összeg 15-nél nagyobb lenne, akkor a felosztás során keletkező 3 csoportban a számok összege legalább $3\cdot 16=48$ lenne, ami nem lehetséges.

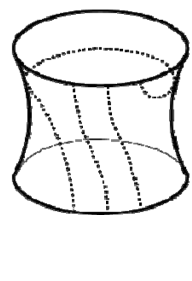
Helyes válasz(ok): A, B, C

5. Az ábrán látható úszógumin két csiga egy-egy zártvonalú nyomot hagyott. A folytonos vonallal rajzolt egyik nyom a „külső egyenlítőn” megy körbe, míg a szaggatott vonallal rajzolt nyom háromszor keresztezi az előző nyomot. Összesen hány részre darabolja ez a két nyom az úszógumi felületét?



(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*

Megoldás: Képzeletben vágjuk fel a folytonos vonal mentén az úszógumit és hajtsuk a felület felső felét felfelé, a felület alsó felét pedig lefelé. Ezáltal egy „hengerfelületet” kapunk, melynek alap és fedőköre maga a folytonossal rajzolt nyom. A szaggatott vonal az eredeti felületen 3-szor metszette a



folytonos vonalat, így ezen a kiterített felületen is 3 közös pontja van fent is és lent is a „henger" tetejével, illetve aljával. Így látható, hogy a felszínt ezek a vonalak 3 részre darabolják.

Helyes válasz(ok): B

6. osztály

1. Bontsátok két csoportra az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számokat úgy, hogy az egyik csoportban háromszor annyi legyen a számok összege, mint a másikban! Összesen hány különböző szétbontás létezik? (Két szétbontás akkor különbözik egymástól, ha ezekben nem ugyanazok a számok vannak az egyik csoportban.)

(A) *4* **(B)** *5* **(C)** *6* **(D)** *7* **(E)** *8*

Megoldás: A megadott számok összege $1+2+3+4+5+6+7+8=36$. Az egyik csoportban akkor lesz háromszor annyi a számok összege (●●●), mint a másikban (●), ha a kisebb összegű csoportban az összeg $36:4=9$. Azt kell tehát megállapítanunk, hogy az adott számok közül hányféleképpen lehet kiválasztani olyan számokat, amelyek összege 9.
Ez egyetlen számmal nem érhető el. Két számmal a következők a lehetőségek:

egyik csoport: 1, 8	másik csoport: 2, 3, 4, 5, 6, 7
egyik csoport: 2, 7	másik csoport: 1, 3, 4, 5, 6, 8
egyik csoport: 3, 6	másik csoport: 1, 2, 4, 5, 7, 8
egyik csoport: 4, 5	másik csoport: 1, 2, 3, 6, 7, 8

Három szám összege a következő módokon lehet 9:

egyik csoport: 1, 2, 6	másik csoport: 3, 4, 5, 7, 8
egyik csoport: 1, 3, 5	másik csoport: 2, 4, 6, 7, 8
egyik csoport: 2, 3, 4	másik csoport: 1, 5, 6, 7, 8

Négy szám összege a megadottak közül nem lehet 9, hiszen már a négy legkisebb szám összege is túl nagy ($1+2+3+4=10$), így több lehetőség nincs. Vagyis összesen $4+3=7$ különböző szétbontás létezik.

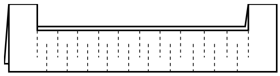
Helyes válasz(ok): D

2. Egy *20 cm × 30 cm*-es papíron vágható akkora rés (akár több vonal mentén is lehet a vágás), amelyen átfér egy

(A) *20 cm × 30 cm × 3 cm-es könyv.* **(B)** *50 cm × 50cm × 3 cm-es könyv.*
(C) *25 cm átmérőjű felfújt labda.* **(D)** *30 cm átmérőjű felfújt labda.*
(E) *600 cm élű fémből készült kocka.*

Megoldás: Akkora rést lehet vágni, hogy bármilyen nagy méretű tárgy átférjen. Ezt az alábbi módon érhetjük el.
Előbb kettéhajtjuk a papírt.

Utána a hajtásél mentén hosszában kivágunk egy keskeny téglalapot úgy, hogy az él végéig egyik végén se érjünk el, majd „fésűfogszerűen” sűrű bevágásokat csinálunk felváltva két oldalról.



Miután ezt szétnyitjuk, egy hosszú zárt szalag keletkezik. Ha sűrűbbek az oldalirányú bevágások, hosszabb szalagot kapunk. Így bármilyen hosszú „szalagkarikát” tudunk csinálni, amelyen bármekkora tárgy átfér.

Helyes válasz(ok): A, B, C, D, E

3. Imi egymás mellé írt néhány 6-ost, majd műveleti jeleket és zárójeleket helyezett el ebbe a sorba úgy, hogy eredményül helyesen 100-at kapott (ha néhány számjegy közé semmit nem tett, azt többjegyű számnak tekintette). Az alábbiakból pontosan hány 6-ost írhatott így egymás mellé?

(A) *6-ot* **(B)** *7-et* **(C)** *8-at* **(D)** *9-et* **(E)** *10-et*

Megoldás: Alább minden válaszlehetőségre láthatunk egy-egy példát:

- hat darab 6-ossal: $(666-66):6=100$
- hét darab 6-ossal: $666:6-66:6=100$
- nyolc darab 6-ossal: $666:6-6-6+6:6=100$
- kilenc darab 6-ossal: $(666:6-66:6)\cdot 6:6=100$
- tíz darab 6-ossal: $(666-66):6+66-66=100$

Helyes válasz(ok): A, B, C, D, E

4. A Kis családban 3 iskolás gyerek van, akik soha nem hagytak ki és nem ismételtek tanévet, de még egyikük sem lett 12. osztályos. Minden tanév végén mindegyikük annyi könyvet kapott ajándékba, ahányadik tanévét éppen befejezte. Ha az elmúlt tanév végéig a három testvér így kapott könyveinek együttes száma 72, akkor hányadik osztályba nem járhat most egyik sem a három testvér közül?

(A) *4.* **(B)** *5.* **(C)** *8.* **(D)** *10.* **(E)** *11.*

Megoldás: Számoljuk össze, hogy egy adott tanév befejezéséig hány könyve gyűlhet össze egy gyereknek:

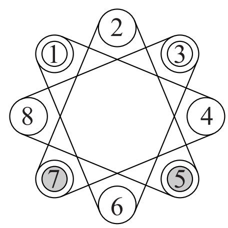
1. osztály befejezéséig: 1
2. osztály befejezéséig: $1+2=3$
3. osztály befejezéséig: $3+3=6$
4. osztály befejezéséig: $6+4=10$
5. osztály befejezéséig: $10+5=15$
6. osztály befejezéséig: $15+6=21$
7. osztály befejezéséig: $21+7=28$
8. osztály befejezéséig: $28+8=36$
9. osztály befejezéséig: $36+9=45$
10. osztály befejezéséig: $45+10=55$
11. osztály befejezéséig: $55+11=66$

A 12. osztályt még egyik gyerek sem fejezhette be, hiszen ekkor neki egyedül már $66+12=78>72$ könyve lenne. (Az, hogy valaki még nem érettségizett, nem jelenti feltétlenül azt, hogy még nem fejezte be a 12. osztályt.) Az viszont elképzelhető, hogy valamelyik gyerek idén elsős, így a tavalyi tanév végén még nem kapott könyvet.

A továbbiakban azt kell megvizsgálnunk, hogy a 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66 számok közül hogyan lehet három (nem feltétlenül különböző) szám összege 72. Haladjunk a legnagyobb szám szerint csökkenő sorrendben:
$72 = 66 + 3 + 3$, így előfordulhatott, hogy az egyik gyerek a 11. osztályt, a másik kettő (ikrek) pedig a 2. osztályt fejezte be az elmúlt tanévben. Továbbá $72 = 66 + 6 + 0$, így az is előfordulhatott, hogy az egyik gyerek a 11. osztályt, a másik a 3. osztályt fejezte be tavaly, a harmadik pedig idén ment iskolába (ezt úgy is jelölhetjük, hogy ő a „0. osztályt” fejezte be tavaly).
$72 = 45 + 21 + 6$, így előfordulhatott, hogy a gyerekek a 9., a 6. és a 3. osztályt fejezték be az elmúlt tanévben.
$72 = 36 + 21 + 15$, így előfordulhatott, hogy a gyerekek a 8., a 6. és az 5. osztályt fejezték be az elmúlt tanévben. Továbbá $72 = 36 + 36 + 0$, így az is előfordulhatott, hogy két gyerek (ikrek) a 8. osztályt fejezték be tavaly, a harmadik pedig idén ment iskolába.
Több lehetőség nincs a felbontásra, ugyanis a $72 - 55 = 17$ és a $72 - 28 = 44$ számok nem írhatók fel a megadott számok közül kettő összegeként, ha pedig mindhárom összeadandó 28-nál kisebb lenne, akkor nem lehetne az összegük 72. (Továbbá a fenti megoldások esetében a $72 - 66 = 6$, a $72 - 45 = 27$ és a $72 - 36 = 36$ számok csak a fent megadott módokon írhatók fel a megadott számok közül kettő összegeként.)
Tehát a testvérek mindegyike az elmúlt tanévben a 0., a 2., a 3., az 5., a 6., a 8., a 9. vagy a 11. osztályt fejezhette be, így ebben a tanévben 1., 3., 4., 6., 7., 9., 10. vagy 12. osztályos lehet. Vagyis a megadott válaszlehetőségek közül 5., 8. és 11. osztályos nem lehet most egyik testvér sem.

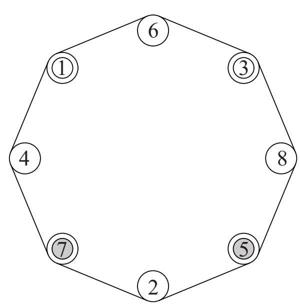
Helyes válasz(ok): B, C, E

5. Az ábra 1-es és 3-as számú köreiben egy-egy világos bábu, az 5-ös és a 7-es számúakban pedig egy-egy sötét bábu áll. Az a feladatunk, hogy a világos bábukat felcseréljük a sötétekkel, megfelelő húzásokkal. Húzni egyszerre mindig csak egy bábut, csak az egyenes vonalak mentén, és csak üres körre szabad. Egy-egy húzás alkalmával több kört is szabad érinteni, ha azok üresek. Ha szükséges, visszafelé is szabad haladni. Az alábbiak közül hány húzással oldható meg a világos és a sötét bábuk felcserélése?



(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *7* **(D)** *8* **(E)** *9*

Megoldás: A vonalrendszert átrajzolhatjuk a jobb oldali ábrán látható formára, így a bejárhatósága nem változik, viszont formáját tekintve egy körútra hasonlít.



A körúton látható, hogy a bábukat a felcseréléshez csak az egyik irányban érdemes mozgatni. Ahhoz, hogy valamelyik bábut egyetlen lépéssel a végleges helyére tudjuk mozgatni (például az 5-öst az 1-es helyére), a másik három bábu mindegyikével el kell mozdulni, de ezek egyikével se tudunk rögtön a végleges helyükre lépni, tehát ebben az esetben legalább $1+2+2+2=7$ húzásra van szükség. (Ha pedig minden bábuval legalább kétszer lépünk, akkor a húzások száma legalább 8.) Vagyis 7-nél kevesebb húzással nem oldható meg a feladat.

7 húzással például a következőképpen oldható meg a feladat (mindig az óramutató járásával megegyező irányban lépünk a kör alakú pályán, az első számmal jelzett mezőről a második számmal jelzett mezőre): 3–8, 1–3, 7–6, 5–1, 8–7, 3–5, 6–3.

Természetesen 7-nél több (például 8 vagy 9) húzással is megoldható a feladat, például úgy, hogy az előbb felsorolt 7 húzás közül a negyedik húzást két vagy három részre bontjuk (5–1 helyett az 5–7 és 7–1, vagy az 5–2, 2–7 és 7–1 húzásokat elvégezve).

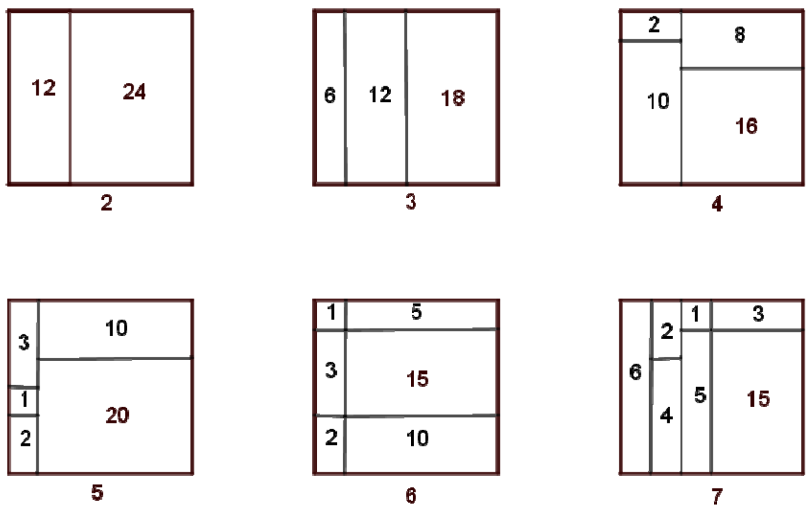
Helyes válasz(ok): C, D, E

7. osztály

1. Egy 6×6-os négyzetrácsot a rácsvonalak mentén az alábbiak közül hány darab különböző területű téglalapra lehet felbontani?

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *6* **(E)** *7*

Megoldás: Az ábrán egy-egy jó példa látható mindegyik válaszlehetőségre:



Helyes válasz(ok): A, B, C, D, E

2. Adott az 123456789 szám. Egy lépés során kiválasztunk két egymás melletti számjegyet, amelyek egyike sem 0, mindkettőt csökkentjük 1-gyel, és felcseréljük a helyüket. Legkevesebb hány ilyen lépés után kaphatjuk meg az így elérhető legkisebb 9-jegyű számot?

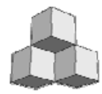
(A) *10* **(B)** *14* **(C)** *18* **(D)** *20* **(E)** *22*

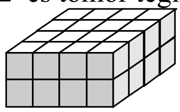
Megoldás: Először megmutatjuk, hogy minden helyiértéken az ott álló számjegy paritása a folyamat során nem változik. Kezdetben a páratlan sorszámú számjegyek páratlanok, a páros sorszámú számjegyek párosak. Ha a kiválasztott két szomszédos jegy például páros-páratlan, akkor az 1-gyel csökkentés után páratlan-páros lesz e két jegy, a csere után pedig ismét páros-páratlan. (Hasonlóan igazolható a másik eset is.)
A jegyek paritásának állandósága miatt a páratlan sorszámú számjegyek lehetséges legkisebb értéke 1 (a páros sorszámúaké pedig 0), így az elméletileg elérhető legkisebb szám az 101010101. Ennek számjegyösszege 5, az eredeti számé $1+2+3+...+9=45$, és mivel minden lépés során 2-vel csökken a számjegyösszeg, ezért ha az 101010101 valóban elérhető, akkor idáig mindig $(45-5):2=20$ lépésben juthatunk el.

Megmutatjuk, hogy az 101010101 tényleg elérhető. Ehhez figyeljük meg, hogy ha ugyanazt a két számjegyet egymás után kétszer kiválasztjuk, akkor összességében mindkettőt 2-vel csökkentjük. Például a 23 számjegyek választása esetén az első csökkentés után 12, a csere után 21 adódik, míg a második csökkentés után 10, a csere után pedig 01. (A két csere „hatástalanítja” egymást, így mindkét lépésben mindkét jegyet 1-gyel csökkentettük.) Egy lehetséges lépéssorozat tehát, ha a 23-at 2-szer, a 45-öt 4-szer, a 67-et 6-szor, a 89-et pedig 8-szor választjuk, így $2+4+6+8=20$ lépés során eljutunk az 101010101-hez.
Vagyis az elérhető legkisebb 9-jegyű számot 20 lépésben kaphatjuk meg.

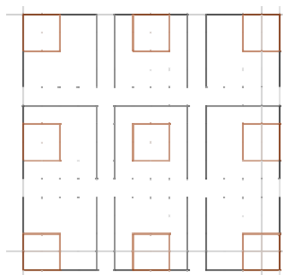
Helyes válasz(ok): D

3. Kehelynek nevezünk három kiskockát, ha párosával egy-egy közös élük van (lásd az ábrát jobbra). Legtöbb hány ilyen kehely található az alább látható $4\times4\times2$-es tömör téglatestben?





(A) *30* **(B)** *42* **(C)** *56* **(D)** *72* **(E)** *90*



Megoldás: Tekintsük azt a kiskockát, ami beleillik a kehelybe (mindhárom kockával lesz közös lapja), illetve azt a $2\times2\times2$-es kockát, melyre a kehely kiegészíthető. Minden $2\times2\times2$-es kockában 8 kehely van (a kocka minden egyes csúcsnál lévő kis kockája egy-egy ilyen kehelybe illő kis kocka). A $4\times4\times2$-es téglatest 9 darab $2\times2\times2$-es kocka alakú részt tartalmaz (lásd az ábrát jobbra, ahol felülnézetben rajzoltuk be a $4\times4\times2$-es téglatestbe a $2\times2\times2$-es kocka lehetséges helyét), így $9\cdot8=72$ kehely van ebben a téglatestben.

Helyes válasz(ok): D

4. Az alábbiak közül hányszor hányas táblázat mezői tölthetők ki a –1, 0, 1 számokkal úgy, hogy a sorokban és az oszlopokban kijövő összegek mind különbözőek legyenek?

(A) *2×2* **(B)** *3×3* **(C)** *4×4* **(D)** *6×6* **(E)** *2020×2020*

Megoldás: A következő oldalon látható példák mutatnak egy-egy helyes kitöltést 2×2-es, 4×4-es, illetve 6×6-os táblázatra (a szürkített oszlopban, illetve sorban az összegeket tüntettük fel):

1	0	1
1	–1	0
2	–1	

0	1	1	1	3
–1	0	1	1	1
–1	–1	1	1	0

0	1	1	1	1	1	5
–1	0	1	1	1	1	3
–1	–1	0	1	1	1	1

–1	–1	–1	1	–2
–3	–1	2	4	

–1	–1	–1	1	1	1	0
–1	–1	–1	–1	1	1	–2
–1	–1	–1	–1	–1	1	–4
–5	–3	–1	2	4	6	

A 2020×2020-as táblázat is kitölthető, például a 6×6-os mintájára úgy, hogy a bal felső sarokból induló átló első 1010 helyére 0-t, a többi 1010 helyére 1-et írunk, ettől az átlótól felfelé mindenhová 1-et, lefelé pedig –1-et. (Ekkor a sorokban az összeg 2019, 2017, 2015, …, 1, 0, –2, –4, …, –2018 lesz, az oszlopokban pedig –2019, –2017, –2015, …, –1, 2, 4, …, 2020, ezek csupa különböző számok.

A 3×3-as táblázat viszont nem tölthető ki a kívánt módon. Ha létezne megfelelő kitöltés, akkor a sorösszegeket és az oszlopösszegeket összeadva páros számot kapnánk (a beírt számok összegének kétszeresét). A 6 különböző sor- és oszlopösszegnek a –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 számok közül kellene kikerülnie, vagyis e 7 számból 6-ot kellene választanunk. A hét szám összege 0, ami páros, így az egyetlen kimaradó értéknek is párosnak kellene lennie, tehát a –3-nak és a 3-nak is elő kellene fordulnia az összegek között. Ez azt jelenti, hogy kellene vagy egy csupa –1-es és egy csupa 1-es sor, vagy mindkettőből egy-egy oszlop (mi most az első lehetőséggel foglalkozunk). Ám ekkor a harmadik sorba három különböző számot kellene írnunk (hogy ne legyen az oszlopösszegek között két azonos), így ez csak a –1, 0, 1 lehetne valamilyen sorrendben. A kitöltés egyik sorrendjét elkészítve láthatjuk, hogy van két egyforma összeg (0). Tehát ez az elrendezés nem lehetséges.

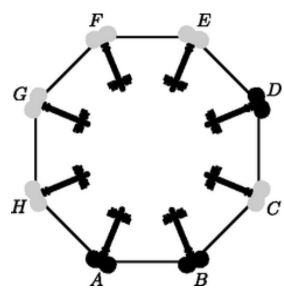
–1	–1	–1	–3
1	1	1	3
–1	0	1	0
–1	0	1	

Helyes válasz(ok): A, C, D, E

5. Robinak 8 kulcsa van felfűzve egy karikára. A kulcsok ránézésre megkülönböztethetetlenek és a két oldaluk is egyforma. Robi, hogy meg tudja a kulcsokat különböztetni, mindegyikre egy-egy színes sapkát húz. Az alábbiakból hány színnel tudja ezt megoldani?

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*

Megoldás: Két szín már elegendő, például az ábrán látható elrendezés esetén.



Ez a konstrukció azért jó, mert nem forgás-, és nem tengelyesen szimmetrikus. Ha Robi megfogja a kulcscsomót, tudja, hogy a két szomszédos fekete kulcs közül az *B*, amelynek másodszomszédja fekete, a másik kulcs pedig *A*. Ha pedig megállapította, hogy melyik az *A* és a *B* kulcs, onnantól kezdve a többi kulcs is egyértelműen meghatározott.

Még több szín esetén még könnyebben megállapíthatja, hogy melyik melyik.

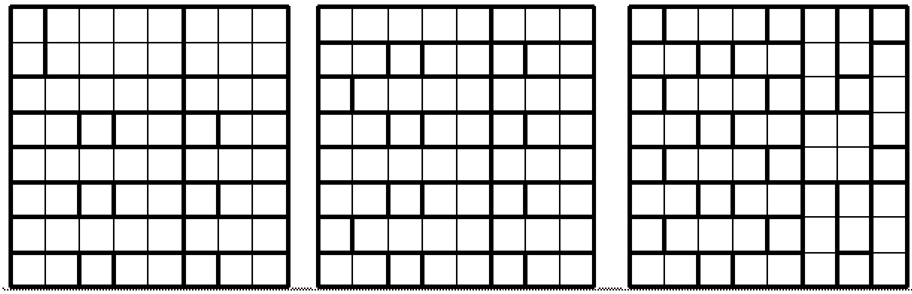
Helyes válasz(ok): A, B, C, D, E

8. osztály

1. Az alábbiak közül hány téglalapra osztható fel a rácsvonalak mentén egy 8×8-as négyzet úgy, hogy az egybevágó téglalapok nem érintkezhetnek, még a csúcsaiknál sem?

(A) *24* **(B)** *30* **(C)** *35* **(D)** *39* **(E)** *45*

Megoldás: A következő ábrákon példát mutatunk 24, 30, illetve 35 téglalapra történő felosztásra:



24 téglalap 30 téglalap 35 téglalap

Megmutatjuk, hogy 39, illetve 45 téglalapra már nem lehetséges a felosztás. Ehhez először vegyük észre, hogy bármely 2×2-es négyzetben a 4 kis négyzet mindegyike érintkezik egymással. Emiatt egy ilyen 2×2-es négyzeten belül a végső felosztásban legfeljebb 1 darab 1×1-es négyzet lehet (hiszen különben érintkezne két 1×1-es négyzet). Mivel a nagy négyzet átfedés nélkül felbontható 16 darab 2×2-es négyzetre, és mindegyikben legfeljebb 1 darab 1×1-es négyzet lehet, így a végső felosztásban az 1×1-es részek száma legfeljebb 16 lehet.

Hasonlóképpen igaz az is, hogy egy 2×2-es négyzeten belül a végső felosztásban legfeljebb 2 olyan kis négyzet lehet, amely valamelyik 1×2-es téglalap része (hiszen mind a 4 kis négyzet érintkezik egymással, így legfeljebb az a kettő kerülhet csak 1×2-es részekbe, amelyek ugyanannak az 1×2-es téglalapnak a két darabját alkotják). Emiatt – a nagy négyzetet átfedés nélkül 16 darab 2×2-es négyzetre bontva – a 64 mezőből összesen legfeljebb $16 \cdot 2 = 32$ mező lehet valamelyik 1×2-es rész darabja, így a végső felosztásban az 1×2-es téglalapok száma legfeljebb $32 : 2 = 16$ lehet.

Ezzel azt kaptuk, hogy ha lenne jó felosztás 39 téglalapra, akkor ebből a 39 részből legfeljebb 16 lehetne 1×1-es, illetve legfeljebb 16 lehetne 1×2-es, a fennmaradó $39 - 16 - 16 = 7$ (vagy több) téglalap területe egyenként legalább 3-3 kis négyzetnyi lenne. Így a 39 téglalap területének összege legalább $16 \cdot 1 + 16 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 69$ kis négyzet lenne, ami már több a rendelkezésre álló 64 kis négyzetnél. Tehát 39 vagy annál több téglalapra nem lehetséges a felosztás.

Helyes válasz(ok): A, B, C

2. Amíg Csilla a megállóban állt, 1 busz és 2 villamos haladt el előtte. Ezt követően megérkezett ebbe a megállóba egy ellenőr. Amíg az ellenőr ott állt, 10 busz haladt el a megálló előtt. Tudjuk, hogy a buszok és a villamosok is állandó gyakorisággal járnak (és csak egyféle buszjárat, illetve egyféle villamosjárat halad el a megálló előtt), továbbá a buszok óránként közlekednek. Összesen hány villamos haladhatott el ez előtt a megálló előtt, amíg ott állt az ellenőr?

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *8* **(D)** *20* **(E)** *30*

Megoldás: Fel fogjuk használni azt az állítást, hogy ha valaki egy járműből n-et lát elhaladni a megállóban tartózkodása során, akkor az illető az adott jármű követési idejének több mint $(n-1)$-szeresét, de kevesebb mint $(n+1)$-szeresét töltötte a megállóban. Az állítás első fele azért igaz, mert az illető által megfigyelt 1. és n. jármű érkezése között éppen ennyi idő telik el, amely alatt az illető biztosan végig a megállóban van. Az állítás második fele pedig azért igaz, mert ha már a követési idő $(n+1)$-szeresét is a megállóban töltené az illető, akkor már legalább $n+1$ járművet látna (hiszen, ha például 3 órát tartózkodunk a megállóban, akkor az óránként járó buszból legalább 3-mal találkozunk).

Jelöljük *c*-vel azt az órában kifejezett időtartamot, amíg Csilla a megállóban állt! Mivel a buszok követési ideje 1 óra, ezért az előzőek alapján felírhatjuk, hogy $0<c<2$. (*c* bármilyen kis pozitív szám lehet, hiszen elképzelhető, hogy Csilla csak pár másodpercet töltött a megállóban, de éppen akkor jött a busz.) Továbbá az is lehet, hogy Csilla majdnem 2 órát a megállóban töltött, de azért csak 1 buszt látott elhaladni, mert az előző busz távozása után nem sokkal jött meg a megállóba, illetve a következő busz érkezése előtt nem sokkal ment el.

Jelöljük a két egymás utáni villamos érkezése közötti időt (órában kifejezve) *v*-vel. Mivel Csilla 2 villamost látott, ezért a korábban leírtak alapján $v<c<3v$. A $v<c<2$ feltételekből $v<2$, míg a $0<c<3v$ feltételekből $0<v$ adódik. Tehát $0<v<2$, vagyis a villamosok követési ideje bármilyen 2 óránál kisebb érték lehet.

Jelöljük az ellenőr megállóban töltött idejét (órában kifejezve) *e*-vel. Mivel ő 10 buszt látott ezalatt elhaladni, ezért az előzőekhez hasonlóan felírhatjuk, hogy $9<e<11$. Ha ő ezalatt *n* villamost látott elhaladni, akkor a becslésünk $(n-1)\cdot v<e<(n+1)\cdot v$ alakú lesz. Mivel *v* értéke tetszőlegesen kis pozitív szám lehet, ezért *n* értéke felülről nincsen korlátozva, hiszen bármilyen elég nagy *n*-hez találunk olyan kis követési időt, hogy *e* óra alatt (ahol $9<e<11$) pontosan *n* villamost lásson az ellenőr elhaladni. Az alsó becsléshez használjuk ki, hogy $9<(n+1)\cdot v$ (vagyis $\frac{9}{v}<n+1$) és $v<2$ (vagyis $\frac{1}{v}>\frac{1}{2}$), így a $\frac{9}{2}<\frac{9}{v}<n+1$ összefüggésből $\frac{7}{2}<n$, azaz $4\le n$ adódik, és minden ilyen egész *n* jó megoldás. Tehát a megadottak közül 4, 8, 20 vagy 30 villamos haladhatott el a megálló előtt, amíg ott állt az ellenőr.

Második megoldás: Az ellenőr nem láthatott pontosan 3 villamost elhaladni. Tudjuk ugyanis, hogy az ellenőr több mint 9 órát a megállóban töltött (mert 10 buszt látott elhaladni), és ha ezalatt csak 3 villamos haladt volna el, akkor a villamosok követési ideje nagyobb lenne 2 óra 15 percnél (hiszen 2 óra 15 perces követési idő esetén bármely 9 órás időtartam alatt már 4 villamos elmenne). Így azonban Csilla, aki 2 óránál kevesebb időt töltött a megállóban (hiszen csak 1 buszt látott elmenni), nem láthatott volna 2 villamost elmenni.

A továbbiakban egy-egy példát mutatunk arra, hogyan valósulhatott meg az, hogy az ellenőr 4, 8, 20 vagy 30 villamost látott elhaladni a megálló előtt. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a buszok minden egész órakor érkeznek a megállóba. A feltüntetett időpontokat és időtartamokat mindig óra:perc formában adjuk meg.

– Legyen a villamosok követési ideje 1:55, az első villamos induljon innen 6:03-kor. Ha Csilla 6:02 – 7:59 között volt a megállóban, akkor a 7 órás buszt, illetve a 6:03-as és a 7:58-as villamost látta. Ha az ellenőr 7:59 – 17:01 között volt a megállóban, akkor ő 10 buszt (a 8 órástól a 17 órásig), illetve 4 villamost (a 9:53-ast, a 11:48-ast, a 13:43-ast és a 15:38-ast) látott (a 17:33-ast már nem).
– Legyen a villamosok követési ideje 1:10, az első villamos induljon innen 6:05-kor. Ha Csilla 6:02 – 7:20 között volt a megállóban, akkor a 7 órás buszt, illetve a 6:05-ös és a 7:15-ös villamost látta. Ha az ellenőr 6:10 – 16:05 között volt a megállóban, akkor ő 10 buszt (a 7 órástól a 16 órásig), illetve 8 villamost (a 7:15-öst, a 8:25-öst, … és a 15:25-öst) látott (a 16:35-öst már nem).
– Legyen a villamosok követési ideje 0:30, járjanak a villamosok minden egész és minden fél órakor. Ha Csilla 6:58 – 7:58 között volt a megállóban, akkor a 7 órás buszt, illetve a 7:00-s és a 7:30-as villamost látta. Ha az ellenőr 6:58 – 16:58 között volt a megállóban, akkor ő 10 buszt (a 7 órástól a 16 órásig), illetve 20 villamost (a 7:00-sat, a 7:30-ast, … és a 16:30-ast) látott (a 17:00-sat már nem).
– Legyen a villamosok követési ideje 0:20, járjanak a villamosok minden egész órakor, valamint minden óra 20-kor és 40-kor. Ha Csilla 6:58 – 7:21 között volt a megállóban, akkor a 7 órás buszt, illetve a 7:00-s és a 7:20-as villamost látta. Ha az ellenőr 6:58 – 16:58 között volt a megállóban, akkor ő 10 buszt (a 7 órástól a 16 órásig), illetve 30 villamost (a 7:00-sat, a 7:20-ast, … és a 16:40-est) látott (a 17:00-sat már nem).

Helyes válasz(ok): B, C, D, E

3. A pusztaszeri lovasverseny döntőjébe, amit körpályán bonyolítottak le, Atilla, Béla és Vajk jutott. Atilla minden egyes kört 2 másodperccel hamarabb tett meg, mint Béla, és Béla 3 másodperccel hamarabb, mint Vajk. Amikor Atilla megnyerte a versenyt, Béla pontosan 1 körrel, Vajk pedig 2 körrel tett meg kevesebbet Atillánál. Hány körből állhatott a pusztaszeri lovasverseny döntője, ha mindig azonos idejű köröket tettek meg az egyes versenyzők?

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *6* **(E)** *7*

Megoldás: Jelölje n az Attila által megtett körök számát (vagyis a feladat kérdését), t pedig azt az időt percben kifejezve, amennyi alatt Attila egy kört megtett. Ekkor a verseny $t \cdot n$ percig tartott. Mivel Béla ez idő alatt $n-1$ kört tett meg, minden kört $t+2$ perc alatt, Vajk pedig $n-2$ kört, körönként $t+5$ perc alatt, ezért: $\begin{cases} t \cdot n = (t+2)\cdot(n-1) \\ t \cdot n = (t+5)\cdot(n-2) \end{cases}$, ahonnan $\begin{cases} tn = tn + 2n - t - 2 \\ tn = tn + 5n - 2t - 10 \end{cases}$, és így az első egyenletből $t = 2n-2$, amelyet a másodikba helyettesítve $5n - 2(2n-2) - 10 = 0$.

Tovább alakítva $5n - 4n + 4 - 10 = 0$, ahonnan $n = 6$.

Ekkor $t = 2n - 2 = 2 \cdot 6 - 2 = 10$. Ezt ellenőrizve, valóban 6 körből állt a lóverseny döntője.

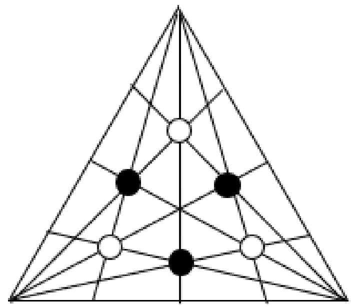
Megjegyzés: Ha a feladat szövege megengedné a tempóváltás lehetőségét is, akkor a körök számára megoldás lenne bármely $n \geq 3$ természetes szám. Például, ha $n = 3$, akkor ezek lehetnek a körönkénti idők: 1. körben Atilla ideje 1 másodperc, Béla ideje 3 másodperc, Vajk ideje 6 másodperc, 2. körben ugyanaz, mint az 1. körben, 3. körben pedig Atilla ideje 4 másodperc, Béla ideje 6 másodperc, Vajk ideje 9 másodperc. Általánosan (tetszőleges $n \geq 3$ esetén) lehetne például: az első $n - 2$ kör mindegyikében Atilla ideje 1 másodperc, Béla ideje 3 másodperc, Vajk ideje 6 másodperc, az $(n-1)$-edik körben Atilla ideje $3n-8$ másodperc, Béla ideje $3n-6$ másodperc, Vajk ideje $3n-3$ másodperc, az n-edik körben pedig Atilla ideje $2n-2$ másodperc, Béla ideje $2n$ másodperc, Vajk ideje $2n+3$ másodperc.

Azonban a feladatban szerepel, hogy mindig azonos idejű köröket tettek meg az egyes versenyzők, ezért (A), (B), (C) és (E) válaszok nem jók

Helyes válasz(ok): D

4. Egy 10 *cm* oldalú szabályos háromszög belsejében legfeljebb hányféleképpen választhatunk ki három pontot úgy, hogy ezek mindegyikét a háromszög összes csúcsával összekötve olyan szakaszokat kapjunk, amelyek a csúcsnál lévő szögeket négy egyenlő részre osztják?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *3* **(E)** *4*



Megoldás: Osszuk a szabályos háromszög minden szögét négy egyenlő részre! Mivel a szabályos háromszög mindhárom belső szögfelezőjére szimmetrikus, azok a metszéspontok, amelyekben három különböző csúcsból induló „szögnegyedelő" találkozik, egy hatszöget határoznak meg, valamint a háromszög középpontját. Ha a kiválasztott három pontot egy tetszőleges csúccsal összekötjük, akkor az adott szöget négy egyenlő részre osztjuk, ezért nem lehet két olyan pont a kiválasztottak között, amely ugyanannak a szögnek egyazon „szögnegyedelőjén" van, valamint nem lehet a háromszög középpontja sem a kiválasztott pontok között. Tehát csakis az ábrán jelölt „hatszög" csúcsai közül választhatunk hármat, amelyek nem szomszédosak. Ez pedig összesesen kétféleképpen tehető meg, vagy a feketével vagy a fehérrel jelölteket választhatjuk.

Helyes válasz(ok): C

5. *A, B, C, D, E* és *F* egy hattagú társaság tagjai. A társaság tagjai között *n* darab csokoládét osztanak szét úgy, hogy mindegyikük kap legalább egy darab csokoládét, továbbá *A* kevesebbet kap, mint *B*, aki kevesebbet kap, mint *C*, aki kevesebbet kap, mint *D*, aki kevesebbet kap, mint *E*, és végül *F* kapja a legtöbbet. A társaság tagjai ismerik ezeket a feltételeket, *n* értékét, és persze azt is, hogy ők maguk hány darab csokoládét kapnak, ezen felül azonban semmilyen más információval nem rendelkeznek. Az alábbiak közül mennyi lehet *n* értéke, amely mellett a szétosztást el lehet úgy végezni, hogy egyikük se tudja pontosan megmondani, hogy a többiek közül ki hány darab csokoládét kapott?

(A) *24* **(B)** *25* **(C)** *26* **(D)** *27* **(E)** *28*

Megoldás: Mivel mindenki kap legalább egy darab csokoládét és *A* kevesebbet kap, mint *B*, aki kevesebbet kap, mint *C*, ..., aki kevesebbet kap, mint *F*, ezért legalább 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 csokit osztottak szét. Nevezzük ezt minimum elosztásnak. Ezt minden elosztásnál meg kell kapniuk, ezért osszunk szét még *(n – 21)* darab csokit úgy, hogy a feladat feltételei teljesüljenek.

A plusz csokik (minimumon felüliek) elosztásánál figyelembe kell venni, hogy ha valaki kap valahány plusz csokit akkor az ABC rendben utána következő emberek mindegyike legalább annyi csokit kap. Azt az *n* számot keressük, aminél nem találunk egy olyan embert sem a társaságban, aki pontosan tudná, hogy a többi tag hány csokit kapott.

Ha $n = 22$ csokit osztunk szét, akkor a fentiek szerint csak *F* kaphatja a plusz egy csokit.

Ha 23-at osztunk szét, akkor két plusz csokit kell elosztani. A lehetséges elosztásokat foglaljuk táblázatba:

E	*F*
0	2
1	1

Mindkét esetben *E* és *F* is tudja az elosztást.

n = 24: Ebben az esetben már 3 plusz csoki van, amiből csak *D*, *E* és *F* kaphat. A lehetséges elosztásokat foglaljuk táblázatba:

D	*E*	*F*
1	1	1
0	1	2
0	0	3

Mindhárom esetben *F* tudja az elosztást.
n = 25: Ebben az esetben 4 plusz csoki kerül a minimumon felül kiosztásra. Ekkor már *C* is kaphat, ám az előzőekhez hasonló okból *A* és *B* még mindig nem. A lehetséges elosztásokat foglaljuk itt is táblázatba:

C	*D*	*E*	*F*
1	1	1	1
0	1	1	2
0	0	1	3
0	0	2	2
0	0	0	4

Ha *C* kap plusz csokit, akkor egyértelműen tudja, hogy az utána levők mind kaptak, és ezt bemondja. Ha *C* nem kap plusz csokit, akkor ő nem tudhatja, hogy *D* kapott-e vagy sem, tehát 25 esetén nem tudják eldönteni. (Csak akkor tudhatná, ha a többiek azt a plusz információt ismernék, ami a feladat szerint nem áll rendelkezésre, hogy *C* nem szólal meg, és ezért a többiek tudják, hogy nem kapott plusz csokit. Ebben az esetben, ha *D* kap plusz csokit, akkor *D* szólal meg, a többi esetben pedig *F* tudja az elosztást. (Ekkor beláthatnánk, hogy legfeljebb *n = 25* csoki esetében még el tudják dönteni, kinél hány csoki van.)
26 esetén szintén nem dönthetik el, például az 1-2-3-4-7-9 leosztás esetén bármelyik tag szemszögéből végiggondolva több leosztás is szóba jöhet.
Nyilvánvaló, hogy 26-nál nagyobb *n* még inkább megfelel.

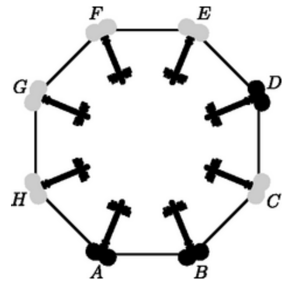
Helyes válasz(ok): B, C, D, E

9. osztály

1. Robinak 8 kulcsa van felfűzve egy karikára. A kulcsok ránézésre megkülönböztethetetlenek és a két oldaluk is egyforma. Robi, hogy meg tudja a kulcsokat különböztetni, mindegyikre egy-egy színes sapkát húz. Az alábbiakból hány színnel tudja ezt megoldani?

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*

Megoldás: Két szín már elegendő, például az ábrán látható elrendezés esetén. Ez a konstrukció azért jó, mert nem forgás-, és nem tengelyesen szimmetrikus. Ha Robi megfogja a kulcscsomót, tudja, hogy a két szomszédos fekete kulcs közül az B, amelynek másodszomszédja fekete, a másik kulcs pedig A. Ha pedig megállapította, hogy melyik az A és a B kulcs, onnantól kezdve a többi kulcs is egyértelműen meghatározott.



Még több szín esetén még könnyebben megállapíthatja, hogy melyik melyik.

Helyes válasz(ok): A, B, C, D, E

2. A digitális órákon a számjegyek rövid pálcika-lámpákból állnak, ahogy az alább látható:

Az órák fogyasztását az határozza meg, hogy mennyi kis pálcika-lámpát kell ki-be kapcsolni, ahogy változik az idő. Például 3-ról 4-re váltásnál két pálcika-lámpát kell ki- és egyet bekapcsolni, ami három kapcsolást jelent. Egy teljes 0, 1, 2, …, 9, 0 ciklus alatt ez összesen harminc kapcsolás. Ha ugyanezeket a digitális jeleket más sorrendben használnánk a 0-tól 9-ig terjedő számok megjelenítésére, akkor kevesebb kapcsolás is elég lenne. Egy megfelelő sorrend esetén mennyi lehet az alábbiak közül a kapcsolások egy teljes ciklusra vonatkozó száma?

(A) *14* **(B)** *15* **(C)** *16* **(D)** *18* **(E)** *20*

Megoldás: Keressük meg a minimumot!
Két szám távolságán most a köztük lévő szükséges kapcsolások számát értjük. Minden számhoz megkeressük a hozzá legkisebb (1 vagy 2) távolságra lévő számokat. A táblázat első sorában és oszlopában a számok, a többi helyen ezek távolsága van (csak az 1 és 2 távolságok).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0							2		1	2
1					2			1		
2				2					2	
3			2			2		2	2	1
4		2								2
5				2			1			1
6	2					1			1	2
7		1		2						
8	1		2	2			1			1
9	2			1	2	1	2		1	

Mivel teljes ciklust kell leírnunk, minden szám előtt és után is kell állnia számnak (az elején és a végén ugyanaz a szám áll). Minden számhoz tartozik két legkisebb távolság, a sorában szereplő két legkisebb szám, ez a 0-nál 1 és 2, az 1-nél szintén 1 és 2, a 2-nél 2 és 2 stb. Ha ezeket összeadjuk, megkapjuk, hogy az adott szám minimum hány kapcsolással kivitelezhető a ciklusban. Ezek összege $3+3+4+3+4+2+2+3+2+2=28$. Ezt elosztva kettővel (mert minden távolságot kétszer számoltunk) megkapjuk azt az elméleti minimumot, aminél kevesebb kapcsolással biztosan nem vihető végbe a teljes ciklus. Ez az összeg 28 : 2 = 14. Azonban a megvalósítható minimum ennél nagyobb, a következők miatt. A 2-es előtt és után a fenti legkisebb távolságok miatt a 8-as és a 3-as áll (a sorrend mindegy), de a 8-asnál keletkező legkisebb távolságok összege, a 2 egység úgy jönne ki, ha a 8-as szomszédai a 6, a 9 vagy a 0 lennének, mert ezek vannak 1 távolságra tőle. Emiatt a 8-asnál számolt legkisebb távolságok összege 1-gyel nő. Hasonló okok miatt a 4-es előtt vagy után 9-esnek kell állnia, aminek a 2 egységnyi eredeti minimumát ez szintén növeli 1-gyel. A 9-es másik oldalán az elméleti minimum szerint a 3-nak és az 5-nek egyszerre kellene lennie, ez nem lehet, ezért vagy a hármasnál vagy az ötösnél ez újabb emelést jelent 1-gyel. Hasonló okok miatt a 8-as egyik oldalán mindenképp a 2-esnek kell állnia, ami miatt a másik oldalon az elméleti minimum szerint a 0-nak és a 6-nak egyszerre kellene lennie. Ez szintén növeli 1-gyel az elméleti minimumot. Az előbbiek alól kivételt csak az az eset képezne, ha a 2-esnél a 8 helyett egy másik szomszédot választanánk, de akkor ez már önmagában legalább 2-vel növeli a vizsgált összeget, hasonlóan a 4-esnek választhatunk a 9-es helyett másik szomszédot, de ez is tovább növelné a kapcsolások számát. Így az elméleti 28-as minimum (a 2-vel való osztás előtt) összesen legalább 4-gyel nőtt, azaz a valódi minimum 32:2=16.

Több olyan ciklus is elképzelhető, aminek a kapcsolási összege 16, egy példa: 14956082371. Így (A) és (B) nem jó és (C) jó válasz.

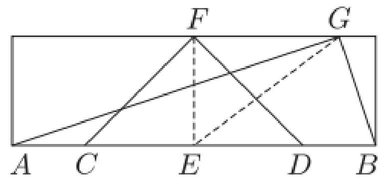
A kapcsolási összege 18 a 14965082371 esetén, ezért (D) jó válasz.

(E) is jó válasz, mivel a kapcsolási összege 20, például a 14956082731 esetén.

Helyes válasz(ok): C, D, E

3. Egy 10 *m* hosszú, téglalap alakú tanterem mennyezetén két olyan lámpát helyeztünk el, amelyek kúp alakú, 90°-os nyílásszögű fénynyalábot bocsátanak ki. Az egyik lámpa a mennyezet közepén található, és a padlón egy 6 *m* átmérőjű kört világít meg. A másik lámpa búráját elfordították úgy, hogy az általa megvilágított részen a terem hosszanti irányában elfér egy 10 *m*-es szakasz, de a két szemközti falra már nem esik fény (a másik két szemközti falra esik fény). Hány méter messze lehet a két lámpa egymástól?

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*



Megoldás: a) Ha a két lámpa a mennyezet hosszabbik oldalának szimmetriatengelyén található, akkor az alábbi megoldás az egyetlen. Az *AGB* háromszögben az *AB* oldallal szemközti szög, $AGB\sphericalangle=90°$, így Thalész tétele szerint *AE*=*EB*=*EG*=10/2=5 *m*.

Tudjuk, hogy *CE*=*ED*=3 *m*. Mivel a *CFD* háromszögben *CD*-vel szemben 90°-os szög található, azért szintén a Thalész-tétel miatt *EF*=3 *m*.

Végül az *EFG* háromszögre Pithágorász tételét felírva kapjuk, hogy $FG^2=EG^2-FE^2=5^2-3^2=16$, ahonnan *FG*=4 *m*.

b) Ha az elfordított lámpa nincs az előző esetbeni egyenesen, akkor 4*m*-nél távolabb is lehet a 2 lámpa egymástól. Legtávolabb akkor lehet, ha a mennyezet sarkában van, ekkor a két lámpa több mint 7 méterre volna egymástól. Így a lehetséges válaszok közül 5 és 6 *m* is szóba jöhet.

Helyes válasz(ok): C, D, E

4. Az *n* szám *reprezentálható*, ha léteznek olyan pozitív *a, b, c* páronként relatív prím egészek, amelyekre $n=\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$. Az alábbi számok közül melyik reprezentálható?

(A) *8* **(B)** *9* **(C)** *10* **(D)** *11* **(E)** *12*

Megoldás: $a=1$, $b=1$ és $c=1$ esetén $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\dfrac{2\cdot2\cdot2}{1}=8$.

$a=1$, $b=1$ és $c=2$ esetén $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\dfrac{2\cdot3\cdot3}{2}=9$.

$a=1$, $b=2$ és $c=3$ esetén $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\dfrac{3\cdot5\cdot4}{6}=10$.

Tehát a 8, 9 és 10 számok reprezentálhatók.

Megmutatjuk, hogy ezeken kívül más szám nem reprezentálható.

Ha az *a*, *b* és *c* számok között vannak egyenlők, például $a=b$, akkor, mivel *a*

és b relatív prímek, ezért szükségképpen $a = b = 1$. Ekkor a feladatban megadott $n = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ egyenlőségből $nc = 2\cdot(1+c)(1+c)$ következik. Mivel c és $1+c$ relatív prímek, ezért $c\,|\,2$. Ha $c=1$, akkor $n=8$, ha pedig $c=2$, akkor $n=9$.
Ha az a, b, c számok között nincsenek egyenlők, akkor $a<b<c$ feltehető. Mivel a, b, c közül bármely kettő relatív prím és $nabc = (a+b)(b+c)(c+a)$, ezért mind $b+c$, mind $c+a$ relatív prím c-hez, így $c\,|\,a+b$, azaz $a+b=mc$ valamilyen m pozitív egészre. Mivel $a+b<2c$, ezért $m=1$ és $a+b=c$.
Hasonlóképpen $a+c=kb$ valamilyen k pozitív egészre. Az $a+c=kb$ és $a+b=c$ egyenletekből $a+b=kb-a$, azaz $2a=b(k-1)$. Mivel a és b relatív prímek, így $b\,|\,2$, ekkor $1\le a<b$ miatt $b=2$, $a=1$ és $c=3$, tehát $n=10$.
Ezzel beláttuk, hogy valóban csak a 8, 9, 10 számok reprezentálhatók.

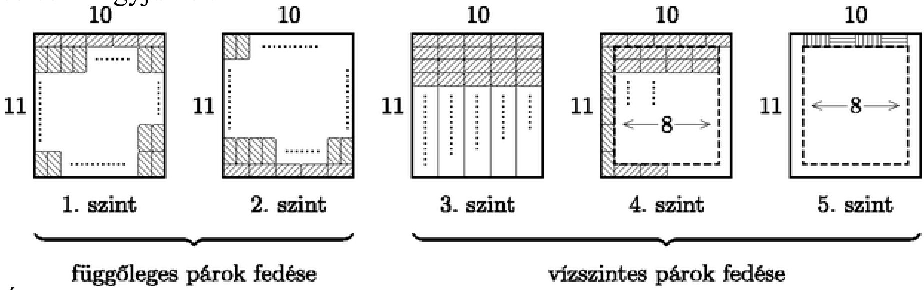
Helyes válasz(ok): A, B, C

5. 2×1-es dominókból tornyot építünk a következő módon. Először elrendezünk 55 dominót úgy, hogy egy 10×11-es téglalapot fedjenek le; ez lesz a torony első szintje. Erre azután további, 55 dominót tartalmazó szinteket építünk, ügyelve arra, hogy minden egyes szint pontosan illeszkedjék az előzőre. Az így kapott építményt akkor nevezzük stabilnak, ha a 10×11-es téglalap minden rácsponttól különböző, belső pontja felett van legalább egy dominónak belső pontja. Az alábbiakból hány szintű lehet egy ilyen stabil torony?

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *6* **(E)** *7*

Megoldás: Nevezzük a torony által lefedett téglalap 10 hosszú oldalát vízszintesnek, a 11 hosszút pedig függőlegesnek. A toronynak a feladatban leírt tulajdonsága azt jelenti, hogy az említett 10×11 méretű téglalapot (1×1)-es mezőkre osztva bármely két, élben szomszédos mezőhöz van a toronyban olyan dominó, amelyik pontosan e két mező felett található (tehát él fölött valahol van dominó belseje). A függőleges élek mentén szomszédos mezőpárokat nevezzük vízszintes pároknak - 99 ilyen pár van - a vízszintes élek mentén szomszédosakat pedig függőleges pároknak - ezekből 100 darab van.
Először igazoljuk, hogy létezik 5-szintes stabil torony. Világos, hogy két szint elegendő arra, hogy mind a 100 függőleges mezőpárt fedje dominó. A 99 vízszintes párnak a feladatban előírt „lefedéséhez" három újabb szintet használunk fel. A téglalap vízszintes oldala páros, így kiparkettázható olyan dominókkal, amelyek kizárólag vízszintes párokat fednek le. Legyen ez a harmadik szint. Hagyjuk el a téglalap jobb és bal szélső oszlopát, valamint a legfelső sorát! A kapott 8×10-es tábla kiparkettázható csupa vízszintes dominóval. Ez a parkettázás kiterjeszthető az elhagyott szélső mezőkre is, legyen ez a negyedik szint. Mostanra a legfelső sor négy „belső" párját kivéve minden vízszin-

tes párról gondoskodtunk. Egy ötödik szinten ezek is lefedhetők, például az előzőhöz hasonló konstrukcióval, ha most a két szélső oszlopon kívül a legalsó sort hagyjuk el.



Állítjuk, hogy ha egy torony legfeljebb 4-szintes, akkor nem stabil. Ebből következik, hogy a legalacsonyabb stabil torony éppen 5-szintes. Indirekt módon bizonyítunk. Először is jegyezzük meg, hogy ha egy ilyen torony stabil, akkor legalább 4 szintje van. Valóban: a 10×11-es téglalap minden egyes, nem a szélen fekvő mezejének 4 szomszédja van, és az ezekhez tartozó dominók más-más szinten helyezkednek el. Ha tehát két szomszédos mező valamelyike nem szélső, akkor pontosan egy dominó fedi e két mezőt.

Ha egy m mezőnek 3 élszomszédja van (azaz m a téglalap szélén van, de nem sarokmező), akkor van egy olyan m' élszomszédja, hogy m és m' felett pontosan két dominó van a toronyban, ráadásul, az előbb elmondottak szerint m' szintén szélső mező. Az m mező további 2 élszomszédját pedig egy-egy m-et is fedő dominó fedi. Minthogy tetszőleges élszomszédos mezők között van olyan, amelynek 3 vagy 4 élszomszédja van, a fentiek szerint nincs olyan szomszédos mezőpár, amelyet a toronynak három dominója is fed.

Vizsgáljuk most már azokat a mezőpárokat, amelyeket a toronynak pontosan két dominója fed le! A fentiek szerint ezek a párok diszjunktak, a tábla szélén helyezkedhetnek el, továbbá az egyes sarokmezők mindkét szomszédjukkal ilyen kétszeresen fedett párt alkotnak. A bal alsó sarokmezőben végződő oszlop 11 mezején végighaladva azt találjuk, hogy vagy az oszlopban van olyan mező, amely nem szerepel kétszeresen fedett párban (ez lehetetlen), vagy az oszlop másik végében lévő sarokmező nincs duplán fedve az oszlopszomszédjával, amit szintén kizártunk. Ezzel a bizonyítást befejeztük, négyszintes stabil torony valóban nem létezik. Egyértelmű, hogy ha öt szintes létezik, akkor hat vagy hét szintes is.

Helyes válasz(ok): C, D, E

10. osztály

1. Adott a síkon néhány egységsugarú kör, mindegyik középpontját zöldre színezzük. A körvonalakon megjelölünk néhány pontot pirossal úgy, hogy minden körvonalra pontosan 2 piros pont illeszkedjen. Legfeljebb mekkora a zöld pontok száma, ha összesen 25 így színezett pont van?

(A) *18* **(B)** *19* **(C)** *20* **(D)** *21* **(E)** *22*

Megoldás: Legyen a piros pontok száma p, a zöld pontok (és így a szóban forgó körök) száma pedig k. A feltétel szerint $p + k = 25$. Minden zöld ponthoz kell lennie (pontosan egy) piros pontpárnak, melynek mindkét tagja pontosan 1 távolságra van a zöld ponttól. Ugyanakkor viszont egy piros pontpár legfeljebb két zöld ponthoz tartozhat: ahhoz a két ponthoz, melyek a két piros ponttól egységnyi távolságra vannak. (Ha van(nak) ilyen(ek).) Mindezek alapján $k \le 2\cdot\binom{p}{2}$, ami viszont $20 < k$ esetén nem teljesülhet, hiszen ekkor a $20 < k \le 2\cdot\binom{p}{2} < 2\cdot\binom{5}{2} = 20$ ellentmondás adódna. Ezzel beláttuk, hogy a zöld pontok száma legfeljebb 20. Most megvizsgáljuk, lehet-e ennyi. Ha $k = 20$, akkor $p = 5$, és a fenti egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, ami azt jelenti, hogy minden piros pontpárnak pontosan két zöld ponthoz kell tartoznia, vagyis, ha a piros pontok $P_1, P_2, \dots, P_5$, akkor zöld pontok úgy kaphatók, hogy minden $1 \le i < j \le 5$ esetén lennie kell K_{ij} és K'_{ij} zöld pontoknak, melyek P_i-től és P_j-től is egységnyi távolságra vannak: $P_iK_{ij} = P_jK_{ij} = P_iK'_{ij} = P_jK'_{ij} = 1$.

Megmutatjuk, hogy ez megvalósítható. Ha a piros pontok közötti távolságok mindegyike kisebb, mint 2, akkor P_i-hez és P_j-hez választhatók megfelelő K_{ij} és K'_{ij} pontok, csak arra kell figyelnünk, hogy a zöld pontok között ne legyen egybeesés. Ezt például elérhetjük úgy, hogy egy 1 hosszú szakaszról választunk öt tetszőleges pontot, amiket pirosra színezünk. Bármely kettő távolsága kisebb, mint 2, így minden piros pontpárhoz fel tudunk venni két-két zöld pontot megfelelően, és a létrejövő zöld pontok mind különbözőek lesznek, máskülönben három piros pontnak valamely (zöld) pont körüli 1 sugarú körre kellene esnie, ami lehetetlen, hiszen a piros pontok egy egyenesen vannak.

Tehát a zöld pontok száma legfeljebb 20 (és ennyi valóban lehet is).

Helyes válasz(ok): C

2. Történt egyszer egy matematikaórán, hogy egy diák az $(a+2b-3)^2$ négyzetre emelést rosszul végezte el, és a^2+4b^2-9 lett az eredménye. Tanára kérésére ellenőrzésképpen behelyettesített a és b helyére egy-egy természetes számot. A behelyettesítés után az eredmény helyesnek bizonyult. Mely számokat helyettesíthette a tanuló a helyére az alábbiak közül?

(A) *-5* **(B)** *3* **(C)** *13* **(D)** *1956* **(E)** *2022*

Megoldás: Hasonlítsuk össze a két eredményt:

$$a^2 + 4ab + 4b^2 - 6a - 12b + 9 = a^2 + 4b^2 - 9$$

Összevonás után kapjuk, hogy

$$4ab - 6a - 12b + 18 = 0 \qquad (1)$$

Keressük azokat az a és b értékeket (egész számokat), amelyekre teljesül az egyenlőség.

Alakítsunk szorzattá:

$$2a(2b-3) - 6(2b-3) = (2a-6)(2b-3) = 0$$

A második tényező egész b esetén páratlan, így nem lehet 0, ezért csak $2a - 6 = 0$ lehetséges. Innen a=3. Helyettesítsük (1)-be:

$$12b - 18 - 12b + 18 = 0\,,$$

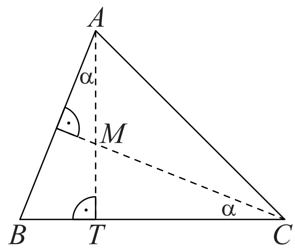
és ez nem függ a b értékétől.

A tanuló tehát az a helyére 3-at helyettesített, b helyére pedig bármit helyettesíthetett.

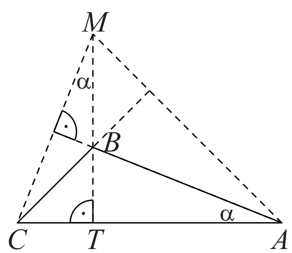
Helyes válasz(ok): B

3. Béla egy olyan ABC háromszöget rajzolt, amelynek M magasságpontjára igaz, hogy $MC = AB$. Mekkora lehet ekkor az ACB szög nagysága?

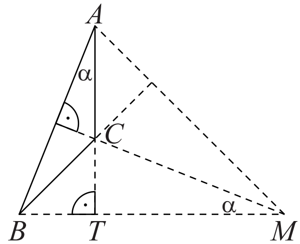
(A) *30°* **(B)** *45°* **(C)** *60°* **(D)** *120°* **(E)** *135°*



Megoldás: Vizsgáljunk először egy hegyesszögű ABC háromszöget! A mellékelt ábrán α-val jelölt BAT és TCM szögek merőleges szárú hegyesszögek, tehát egyenlők. Tudjuk, hogy az AB és CM szakaszok hossza egyenlő, ezért a BTA és MTC derékszögű háromszögek egybevágók (hiszen szögeik nagysága, illetve átfogójuk hossza megegyezik). Így az α szög melletti befogójuk is egyenlő hosszú, azaz $AT = TC$. Emiatt az ATC derékszögű háromszög egyenlő szárú, és így $ACB\measuredangle = 45°$.



Ha az ABC háromszög A-nál vagy B-nél derékszögű, akkor A vagy B azonos az M magasságponttal, amiből ismét $ACB\measuredangle = 45°$ adódik. Ha a háromszög C-nél lenne derékszögű, akkor $C = M$ miatt nem teljesülhetne az $MC = AB$ összefüggés, ez tehát nem lehetséges.



Ha az ABC háromszög A-nál vagy B-nél tompaszögű, akkor a hegyesszögű esethez hasonló ábrát kapunk, csak más betűzéssel. Ha például a B csúcsnál van a tompaszög, akkor a bal oldali ábrán a CTM és BTA háromszögek egybevágók, így az α szöggel

szemközti befogójuk is egyenlő hosszúságú, azaz $CT = BT$. Emiatt a CTB derékszögű háromszög egyenlő szárú, és így $ACB\measuredangle = 45°$.
Legyen végül ABC egy C-nél tompaszögű háromszög. Az α-val jelölt BAT és TMC szögek most is merőleges szárú hegyesszögek, a BTA és CTM háromszögek egybevágóságából $CT = BT$ adódik, vagyis $TCB\measuredangle = 45°$ és $ACB\measuredangle = 180° - 45° = 135°$.
Tehát az ACB szög nagysága 45° vagy 135° lehet.

Helyes válasz(ok): B, E

4. Egy bizottság 40-szer ülésezett. Mindegyik ülésen pontosan 10 fő volt jelen. A bizottság bármely két tagja legfeljebb egy ülésen vett együtt részt. Ekkor a bizottság tagjainak száma…

(A) *lehet 60-nál kevesebb* **(B)** *lehet 62-nél kevesebb* **(C)** *lehet 62*
(D) *lehet 63* **(E)** *biztosan 63-nál több*

Megmutatjuk, hogy a bizottság legalább 64 emberből áll.
Ha található a tagok között olyan, aki legalább hét ülésen volt jelen, akkor az ezeken részt vevő további $7 \cdot 9$ ember szükségképpen mind különböző, ez viszont legalább $7 \cdot 9 + 1 = 64$ tagot jelent.
Ha minden tag csak legfeljebb hat ülésen vett részt, akkor az ülések összlétszáma csak úgy lehetett $40 \cdot 10 = 400$, ha legalább $\frac{400}{6} > 66$ tagja van a bizottságnak. Tehát a bizottság tagjainak száma biztosan 63-nál több

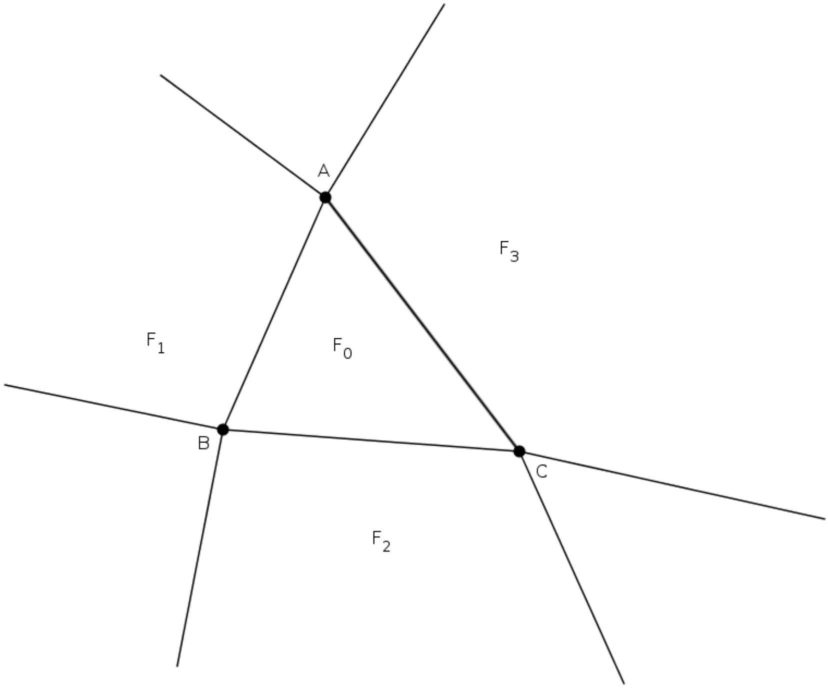
Helyes válasz(ok): E

5. Legfeljebb hány lapja lehet egy olyan konvex poliédernek, amelynek kiválasztható három lapja úgy, hogy a poliéder minden éle illeszkedik a kiválasztott lapok valamelyikére?

(A) *4* **(B)** *5* **(C)** *6* **(D)** *7* **(E)** *8*

Megoldás: Legyenek a kiválasztott lapok F_1, F_2, F_3. Tekintsünk egy tetszőleges nem kiválasztott F lapot. F-nek F_1, F_2, F_3 mindegyikével legfeljebb egy közös éle van, ezért F szükségképpen háromszög, és F_1, F_2, F_3 mindegyikével pontosan egy közös éle van.
Rögzítsünk egy nem kiválasztott F_0 lapot, aminek csúcsai A, B és C, legyen

$A = F_0 \cap F_1 \cap F_3$, $B = F_0 \cap F_1 \cap F_2$, $C = F_0 \cap F_2 \cap F_3$



I.eset Ha $F_1 \cap F_2$, $F_2 \cap F_3$ és $F_3 \cap F_1$ mindegyike közös él. Ekkor ezek A-tól, B-től és C-től különböző végpontjaik rendre legyenek A', B' és C'.
Először vizsgáljuk azt a lehetőséget, amikor A', B' és C' páronként különbözőek. Tegyük fel, hogy ekkor (például) $A'B'$ nem éle P-nek. Ekkor létezik F_1-nek egy X csúcsa, amely sem F_2-nek, sem F_3-nak nem csúcsa. De ekkor egy X-re illeszkedő nem kiválasztott háromszöglapnak nem lehet egyszerre F_2-vel és F_3-mal is közös éle, ami ellentmond a kezdeti megállapításunknak. Így $A'B'$, s hasonlóan $A'C'$ és $B'C'$ is éle P-nek, s ekkor szükségképpen A',B' és C' egy további háromszöglapot határoznak meg. P ekkor egy 5 lapú test, amelynek élgráfja megegyezik egy háromszög alapú hasáb élgráfjával.
Most tegyük fel, hogy (mondjuk) $A'=B'$. Ekkor F_1 háromszöglap, amelynek három szomszédja F_0, F_2 és F_3. A kezdeti megállapításunk miatt P-nek további lapja már nem lehet (mert az szomszédos kellene legyen F_1-gyel), így ekkor A', B' és C' egybeesnek, és P tetraéder.
II. eset Valamely két kiválasztott lapnak nincs közös éle, (mondjuk) $F_1 \cap F3=A$. Ekkor A-ra illeszkedik egy $F_4=ADE_\triangle$ háromszöglap, és $F_1 \cap F_4$ az AD él, $F_3 \cap F_4$ pedig AE él. A fentiek miatt DE él illeszkedik F_2-re, így B és D is F_1 és F_2 lapok közös csúcsai, vagyis $F_1 \cap F_2=BD$, és hasonlóan $F_2 \cap F_3=EC$, és a test egy négyszög alapú gúla.
Más lehetőség nincs, tehát egy a kívánalmaknak megfelelő poliédernek legfeljebb 5 lapja van.

Helyes válasz(ok): B

11. osztály

1. Adott a síkon néhány egységsugarú kör, mindegyik középpontját zöldre színezzük. A körvonalakon megjelölünk néhány pontot pirossal úgy, hogy minden körvonalra pontosan 2 piros pont illeszkedjen. Legfeljebb mekkora a zöld pontok száma, ha összesen 25 így színezett pont van?

(A) *18* **(B)** *19* **(C)** *20* **(D)** *21* **(E)** *22*

Megoldás: Legyen a piros pontok száma p, a zöld pontok (és így a szóban forgó körök) száma pedig k. A feltétel szerint $p + k = 25$. Minden zöld ponthoz kell lennie (pontosan egy) piros pontpárnak, melynek mindkét tagja pontosan 1 távolságra van a zöld ponttól. Ugyanakkor viszont egy piros pontpár legfeljebb két zöld ponthoz tartozhat: ahhoz a két ponthoz, melyek a két piros ponttól egységnyi távolságra vannak. (Ha van(nak) ilyen(ek).) Mindezek alapján $k \le 2 \cdot \binom{p}{2}$, ami viszont $20 < k$ esetén nem teljesülhet, hiszen ekkor a $20 < k \le 2 \cdot \binom{p}{2} < 2 \cdot \binom{5}{2} = 20$ ellentmondás adódna. Ezzel beláttuk, hogy a zöld pontok száma legfeljebb 20. Most megvizsgáljuk, lehet-e ennyi. Ha $k = 20$, akkor $p = 5$, és a fenti egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, ami azt jelenti, hogy minden piros pontpárnak pontosan két zöld ponthoz kell tartoznia, vagyis, ha a piros pontok $P_1, P_2, \ldots, P_5$, akkor zöld pontok úgy kaphatók, hogy minden $1 \le i < j \le 5$ esetén lennie kell K_{ij} és K'_{ij} zöld pontoknak, melyek P_i-től és P_j-től is egységnyi távolságra vannak: $P_iK_{ij} = P_jK_{ij} = P_iK'_{ij} = P_jK'_{ij} = 1$.
Megmutatjuk, hogy ez megvalósítható. Ha a piros pontok közötti távolságok mindegyike kisebb, mint 2, akkor P_i-hez és P_j-hez választhatók megfelelő K_{ij} és K'_{ij} pontok, csak arra kell figyelnünk, hogy a zöld pontok között ne legyen egybeesés. Ezt például elérhetjük úgy, hogy egy 1 hosszú szakaszról választunk öt tetszőleges pontot, amiket pirosra színezünk. Bármely kettő távolsága kisebb, mint 2, így minden piros pontpárhoz fel tudunk venni két-két zöld pontot megfelelően, és a létrejövő zöld pontok mind különbözőek lesznek, máskülönben három piros pontnak valamely (zöld) pont körüli 1 sugarú körre kellene esnie, ami lehetetlen, hiszen a piros pontok egy egyenesen vannak.
Tehát a zöld pontok száma legfeljebb 20 (és ennyi valóban lehet is).

Helyes válasz(ok): C

2. Adott $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ valós számok esetén összesen hány különböző valós gyöke lehet az $ax^2 + bx + c = 0$, $bx^2 + cx + a = 0$ és $cx^2 + ax + b = 0$ egyenleteknek?

(A) *0* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *6*

Megoldás: Ha mindhárom egyenletnek lenne valós gyöke, akkor a diszkriminánsok vizsgálatából $b^2 \ge 4ac$, $c^2 \ge 4ab$ és $a^2 \ge 4bc$ adódna. Mivel az

egyenlőtlenségek mindkét oldalán pozitív mennyiségek állnak, a három egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeszorozhatjuk, így $a^2b^2c^2 \geq 64a^2b^2c^2$ adódik, amelyből a pozitív $a^2b^2c^2$ kifejezéssel osztva $1 \geq 64$-et kapunk. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy nem lehet egyszerre mindhárom egyenletnek valós gyöke, tehát a különböző valós gyökök száma legfeljebb 4.
A különböző valós gyökök száma lehet 0, 2, 3 vagy 4, amint azt a következő példák mutatják:
$(a, b, c) = (2, 3, 4)$ esetén a $b^2 \geq 4ac$, $c^2 \geq 4ab$ és $a^2 \geq 4bc$ egyenlőtlenségek egyike sem teljesül, így egyik egyenletnek sincs valós gyöke.
$(a, b, c) = (1, 2, 3)$ esetén a $b^2 \geq 4ac$, $c^2 \geq 4ab$ és $a^2 \geq 4bc$ egyenlőtlenségek közül csak a második teljesül ($9 > 8$, tehát a bal oldal szigorúan nagyobb), így a $2x^2 + 3x + 1 = 0$ egyenletnek 2 különböző valós gyöke van.
$(a, b, c) = (1, 6, 9)$ esetén a $b^2 \geq 4ac$, $c^2 \geq 4ab$ és $a^2 \geq 4bc$ egyenlőtlenségek közül az első egyenlőséggel teljesül ($36 = 36$), a második szigorúan teljesül ($81 > 24$), a harmadik pedig nem teljesül. Az $x^2 + 6x + 9 = 0$ egyenlet egyetlen valós gyöke a –3, a $6x^2 + 9x + 1 = 0$ egyenletnek pedig 2 különböző valós gyöke van, amelyek egyike sem –3, így az egyenleteknek összegesen 3 különböző valós gyöke van.
$(a, b, c) = (1, 5, 6)$ esetén a $b^2 \geq 4ac$, $c^2 \geq 4ab$ és $a^2 \geq 4bc$ egyenlőtlenségek közül az első kettő teljesül, mindkettő szigorúan ($25 > 24$ és $36 > 20$), a harmadik pedig nem. Az $x^2 + 5x + 6 = 0$ egyenlet valós gyökei –2 és –3, míg az $5x^2 + 6x + 1 = 0$ egyenlet valós gyökei –1 és $-\frac{1}{5}$, így ekkor az egyenleteknek összesen 4 különböző valós gyöke van.

Helyes válasz(ok): A, B, C, D

3. Az 1, 2, 3, 4, 5, …, 2022 egymást követő 2022 szám közül hány megfelelőnek az eltávolítátásával érhető el, hogy a megmaradók közül egyik se legyen egyenlő másik két különböző megmaradó szorzatával?

(A) *31* **(B)** *41* **(C)** *43* **(D)** *47* **(E)** *51*

Megoldás: Először megmutatjuk, hogy a 2, 3, 4, …, 44 számok (ez 43 darab) eltávolításával elérhető a kért feltétel, ezáltal 47 és 51 megfelelő választásával is.
Ha ugyanis a fenti 43 számot távolítjuk el, akkor a megmaradók közül bármelyik kettő (eltekintve az 1-től) szorzata nagyobb lesz, mint $45^2 = 2025 > 2022$.
Most pedig megmutatjuk, hogy bármely 42 szám, így annál kevesebb esetén sosem érhető el a leírt tulajdonság. Figyeljuk meg a következő 42 darab számhármast:

(2, 87, 2 · 87), (3, 86, 3 · 86), (4, 85, 4 · 85), …, (44, 45, 44 · 45)

Ebben minden szám különböző és mindegyik kisebb mint $44 \cdot 45 = 1980 < 2022$. Ez 43 darab számhármas, így az eredeti számok közül, ha bármely 42-t távolítjuk el, az egyik a felsorolt számhármasok közül biztosan megmarad, ami azt jelenti, hogy lesz olyan a megmaradtak közül, amelyik egyenlő két másik megmaradó szorzatával.

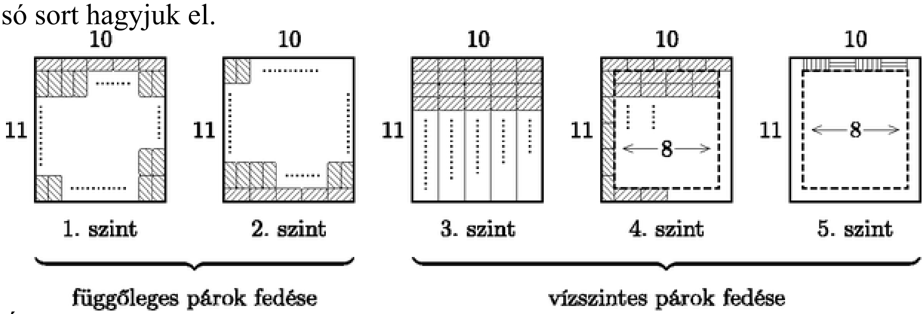
Helyes válasz(ok): C, D, E

4. 2×1-es dominókból tornyot építünk a következő módon. Először elrendezünk 55 dominót úgy, hogy egy 10×11-es téglalapot fedjenek le; ez lesz a torony első szintje. Erre azután további, 55 dominót tartalmazó szinteket építünk, ügyelve arra, hogy minden egyes szint pontosan illeszkedjék az előzőre. Az így kapott építményt akkor nevezzük stabilnak, ha a 10×11-es téglalap minden rácsponttól különböző, belső pontja felett van legalább egy dominónak belső pontja. Az alábbiakból hány szintű lehet egy ilyen stabil torony?

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *6* **(E)** *7*

Megoldás: Nevezzük a torony által lefedett téglalap 10 hosszú oldalát vízszintesnek, a 11 hosszút pedig függőlegesnek. A toronynak a feladatban leírt tulajdonsága azt jelenti, hogy az említett 10×11 méretű téglalapot (1×1)-es mezőkre osztva bármely két, élben szomszédos mezőhöz van a toronyban olyan dominó, amelyik pontosan e két mező felett található (tehát él fölött valahol van dominó belseje). A függőleges élek mentén szomszédos mezőpárokat nevezzük vízszintes pároknak - 99 ilyen pár van - a vízszintes élek mentén szomszédosakat pedig függőleges pároknak - ezekből 100 darab van.

Először igazoljuk, hogy létezik 5-szintes stabil torony. Világos, hogy két szint elegendő arra, hogy mind a 100 függőleges mezőpárt fedje dominó. A 99 vízszintes párnak a feladatban előírt „lefedéséhez" három újabb szintet használunk fel. A téglalap vízszintes oldala páros, így kiparkettázható olyan dominókkal, amelyek kizárólag vízszintes párokat fednek le. Legyen ez a harmadik szint. Hagyjuk el a téglalap jobb és bal szélső oszlopát, valamint a legfelső sorát! A kapott 8×10-es tábla kiparkettázható csupa vízszintes dominóval. Ez a parkettázás kiterjeszthető az elhagyott szélső mezőkre is, legyen ez a negyedik szint. Mostanra a legfelső sor négy „belső" párját kivéve minden vízszintes párról gondoskodtunk. Egy ötödik szinten ezek is lefedhetők, például az előzőhöz hasonló konstrukcióval, ha most a két szélső oszlopon kívül a legalsó sort hagyjuk el.



Állítjuk, hogy ha egy torony legfeljebb 4-szintes, akkor nem stabil. Ebből következik, hogy a legalacsonyabb stabil torony éppen 5-szintes. Indirekt módon bizonyítunk. Először is jegyezzük meg, hogy ha egy ilyen torony stabil, akkor legalább 4 szintje van. Valóban: a 10×11-es téglalap minden egyes, nem a szélen fekvő mezejének 4 szomszédja van, és az ezekhez tartozó dominók más-más szinten helyezkednek el. Ha tehát két szomszédos mező valamelyike nem szélső, akkor pontosan egy dominó fedi e két mezőt.

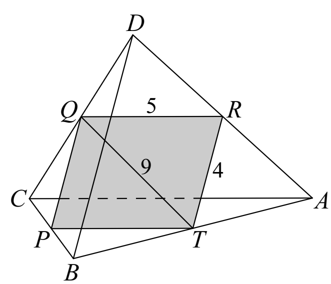
Ha egy *m* mezőnek 3 élszomszédja van (azaz *m* a téglalap szélén van, de nem sarokmező), akkor van egy olyan *m'* élszomszédja, hogy *m* és *m'* felett pontosan két dominó van a toronyban, ráadásul, az előbb elmondottak szerint *m'* szintén szélső mező. Az *m* mező további 2 élszomszédját pedig egy-egy *m*-et is fedő dominó fedi. Minthogy tetszőleges élszomszédos mezők között van olyan, amelynek 3 vagy 4 élszomszédja van, a fentiek szerint nincs olyan szomszédos mezőpár, amelyet a toronynak három dominója is fed.

Vizsgáljuk most már azokat a mezőpárokat, amelyeket a toronynak pontosan két dominója fed le! A fentiek szerint ezek a párok diszjunktak, a tábla szélén helyezkedhetnek el, továbbá az egyes sarokmezők mindkét szomszédjukkal ilyen kétszeresen fedett párt alkotnak. A bal alsó sarokmezőben végződő oszlop 11 mezején végighaladva azt találjuk, hogy vagy az oszlopban van olyan mező, amely nem szerepel kétszeresen fedett párban (ez lehetetlen), vagy az oszlop másik végében lévő sarokmező nincs duplán fedve az oszlopszomszédjával, amit szintén kizártunk. Ezzel a bizonyítást befejeztük, négyszintes stabil torony valóban nem létezik. Egyértelmű, hogy ha öt szintes létezik, akkor hat vagy hét szintes is.

Helyes válasz(ok): C, D, E

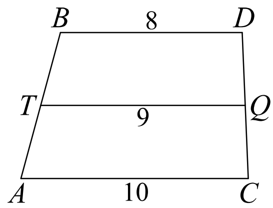
5. A térben elhelyeztük az *A*, *B*, *C* és *D* pontokat úgy, hogy $AC = 10$ és $BD = 8$. Legyen *AB* felezőpontja *T*, *BC* felezőpontja *P*, *DC* felezőpontja *Q* és *AD* felezőpontja *R*. Tudjuk még, hogy $QT = 9$. Az alábbiak közül hányat választhatunk ki az *A*, *B*, *C*, *D*, *P*, *Q*, *R*, *T* pontok közül úgy, hogy azok egy síkban legyenek?

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *6* **(E)** *7*



1. megoldás: Mivel *QR* középvonal a *DAC* háromszögben, ezért $QR = 5$. Hasonlóan *RT* középvonal az *ABD* háromszögben, így $RT = 4$. A *QRT* háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség miatt $QR + RT > QT$ -nek teljesülnie kellene, csakhogy $QT = 9$, így $QR + RT = QT$, tehát a *Q*, *R* és *T* pontok nem alkotnak háromszöget, hanem egy egyenesre esnek. Ez viszont csak úgy teljesülhet, ha *A*, *B*, *C* és *D* egy síkban vannak (hiszen *QR* és így *T* is benne van *ADC* síkjában, ezért *RT* az *ADC* és az *ADB* síkokban is benne van, tehát ez a két sík megegyezik), vagyis mind a 8 pont egy síkban van. Így a megadott pontok közül 3-at, 4-et, 5-öt, 6-ot és 7-et is kiválaszthatunk, ezek mindig egy síkban lesznek.

2. megoldás: Használjunk vektorokat! Belátjuk, hogy $\overrightarrow{TQ}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.



$\overrightarrow{TQ}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{TC}+\overrightarrow{TD}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{BD}\right)=$ $=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$, hiszen $\overrightarrow{TA}$ és $\overrightarrow{TB}$ ellentett vektorok. Viszont $\left|\overrightarrow{TQ}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|\le\frac{1}{2}\cdot\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|+\left|\overrightarrow{BD}\right|\right)$. Mivel azonban $\left|\overrightarrow{TQ}\right|=9$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=10$ és $\left|\overrightarrow{BD}\right|=8$, ezért az előző relációban az egyenlőség érvényes, vagyis $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|+\left|\overrightarrow{BD}\right|$, ami viszont csak akkor lehetséges, ha $\overrightarrow{AC}\parallel\overrightarrow{BD}\parallel\overrightarrow{TQ}$. Mindez azt jelenti, hogy *A*, *B*, *C*, *D*, és ezáltal a 8 pont mindegyike egy síkba esik.

Helyes válasz(ok): A, B, C, D, E

12. osztály

1. Hét rabló a zsákmányolt aranytallérokat úgy osztja el, hogy névsor szerint haladva annyit vesznek el, amennyi a még nem szétosztott aranytallérok számában a számjegyek összege. Két teljes kör után az arany elfogy. Mindenkinek ugyanannyi jutott, csak a vezérnek lett több. Hányadik lehetett a vezér a névsorban?

(A) *3.* **(B)** *4.* **(C)** *5.* **(D)** *6.* **(E)** *7.*

Megoldás: A 9-cel való oszthatósági szabály alapján az első elvétel után már mindig 9-cel osztható lesz a még megmaradt tallérok száma, és így az egyes lépésekben elvett tallérok száma is. (Hiszen a zsákmányolt aranytallérok számának 9-es maradéka ugyanannyi, mint az elsőként elvett tallérok számának.) Az i-edik elvétel előtt még meglévő tallérok számát jelölje a_i. Tekintsük az utolsó (vagyis 14-edik) elvételt. Mivel a tallérok elfogynak, ezért ezt megelőzően a tallérok száma csak egyjegyű szám lehetett, hiszen a legalább kétjegyű számok nagyobbak számjegyeik összegénél. Mivel az elvett tallérok száma 9-cel osztható, ezért csak a_{14}=9 lehetett. Innen visszafelé haladva meg tudjuk határozni az a_i számokat. Ha ugyanis a tallérok száma valamikor $\overline{b_k b_{k-1} \dots b_1 b_0} = \sum_{i=0}^{k} b_i \cdot 10^i$, akkor a soron következő elvétel után

$$\sum_{i=0}^{k} b_i \cdot 10^i - \sum_{i=0}^{k} b_i = \sum_{i=1}^{k} (10^i - 1) b_i \geq (10k - 1) b_k \geq 10^k - 1$$

tallér marad. Ez speciálisan azt is jelenti, hogy mikor először 100 alá csökken a tallérok száma, akkor legalább (és így pontosan) $10^2 - 1 = 99$ tallér lesz. Vagyis a 13. elvétel előtt a tallérok száma már kétjegyű kellett legyen. Egy 9-cel osztható kétjegyű számban a számjegyek összege 18 (ha a szám a 99) vagy 9 (minden más esetben). Mivel $99 - (9 + 9) = 81$, ezért amíg hátulról haladva el nem érünk a 81-ig, minden lépésben 9 tallért vettek el. Vagyis $a_{13} = 9+9 = 18$, és ugyanígy tovább haladva:
$a_{12} = 27$, $a_{11} = 36$, $a_{10} = 45$, $a_9 = 54$, $a_8 = 63$, $a_7 = 72$, $a_6 = 81$.
Az 5. elvétel előtt még meglévő tallérok száma csak 90 vagy 99 lehet. Ha $a_5 = 90$ lenne, akkor a_4 értéke csak 99 lehetne, viszont 99 tallérból nem 9-et, hanem 18-at kellene elvenni, így ez az eset nem lehetséges. Tehát $a_5 = 99$.

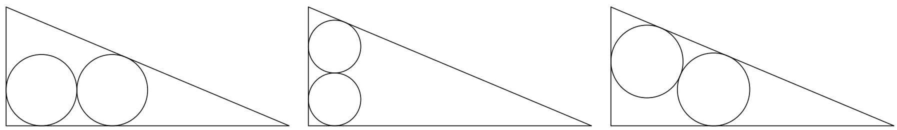
Ezért $a_4 = \overline{b_2 b_1 b_0}$ egy háromjegyű szám, melyre $99b_2 + 9b_1 = 99$. Mivel $b_2 \geq 1$, ezért $b_2 = 1$, $b_1 = 0$. Továbbá $9|a_4$ miatt csak $b_0 = 8$ lehet, tehát $a_4 = 108$. Az a_1, a_2, a_3 számokról könnyen látható, hogy háromjegyűek, hiszen, ha a_1 legalább négyjegyű lenne, akkor a korábbiak szerint az első háromjegyű tallérszám a 999 lenne, onnantól pedig minden lépésben legfeljebb 27 tallért vennének el a rablók, aminek $a_4 = 108$ ellentmond. így a 3. lépésben 9, 18, vagy 27 tallért vett el a soron következő rabló, azonban $108 + 9 = 117$, $108 + 18 = 126$, $108 + 27 = 135$ miatt csak $a_3 = 117$ lehetséges. Ehhez hasonlóan $a_2 \in \{117+9, 117+18, 117+27\}$, és a három lehetőség közül csak $a_2 = 126$ lehetséges. Azt már tudjuk, hogy az osztozkodás végén a 2., 3., 4., 6. és 7. rablóknak 18 tallérja lett, az 5.-nek pedig 27. így a vezér – amennyiben a feladatban szereplő osztozkodás egyáltalán előfordulhat – biztosan az 5. a névsorban. Mivel a többieknek egyformán 18 tallérja kell legyen a végén, ezért ez pontosan akkor fordul elő, ha első lépésben is 9 tallért vett el a névsor szerinti első rabló, vagyis $a_1 = 126 + 9 = 135$. Mivel $1 + 3 + 5 = 9$, ezért ez valóban megvalósulhatott. Tehát a vezér az ötödik a névsorban.

Helyes válasz(ok): C

2. Az ABC derékszögű háromszög oldalai 5, 12 és 13 egység hosszúak. A háromszögbe két egyenlő sugarú körlapot helyeztünk úgy, hogy azok érintik egymást és a háromszög két-két oldalát. Hány egység lehet a körök sugara?

(A) *1* **(B)** $\frac{10}{9}$ **(C)** $\frac{26}{17}$ **(D)** $\frac{3}{2}$ **(E)** *2*

Megoldás: A két kör együttesen négy oldalát érinti a háromszögnek, így 3 esetet kell vizsgálnunk aszerint, hogy a háromszögnek melyik az az oldala, amelyet mindkét kör érint:

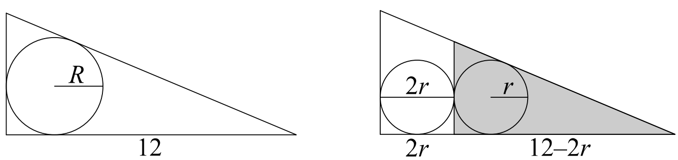


1. eset 2. eset 3. eset

Az ABC háromszög beírt körének R sugara a háromszög T területéből kiszámítható a területképletekkel: $T = \frac{5 \cdot 12}{2} = \frac{(5+12+13) \cdot R}{2}$, ahonnan $R = 2$.

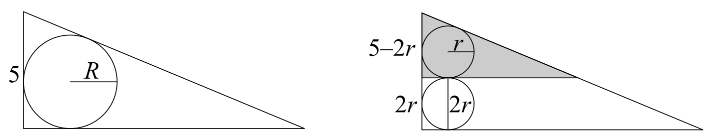
Az 1. és 2. esetben az ABC háromszög és az alábbi ábrákon szürkével jelölt háromszög hasonlóságát használjuk fel a keresett körök r sugarának kiszámítására:

1. eset:



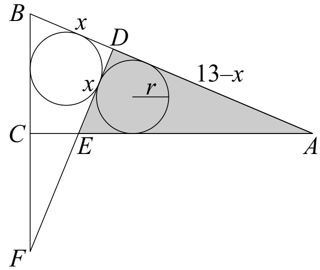
$\frac{R}{r} = \frac{12}{12-2r}$, azaz $\frac{2}{r} = \frac{12}{12-2r}$, így $2(12-2r) = 12r$, ahonnan $r = \frac{3}{2}$.

2. eset:



$\frac{R}{r} = \frac{5}{5-2r}$, azaz $\frac{2}{r} = \frac{5}{5-2r}$, így $2(5-2r) = 5r$, ahonnan $r = \frac{10}{9}$.

3. eset: Az ABC és AED háromszögek hasonlók, hiszen szögeik megegyeznek. Az AED és FBD háromszögek egybevágók, hiszen szögeik megegyeznek, és beírt körük sugara egyenlő. Legyen $x = BD = DE$. Az ABC és AED háromszögek hasonlósága miatt $\frac{x}{CB} = \frac{13-x}{CA}$, azaz $\frac{x}{5} = \frac{13-x}{12}$, így $12x = 5(13-x)$, ahonnan $x = \frac{65}{17}$.



Továbbá $\frac{r}{R} = \frac{x}{CB}$, azaz $\frac{r}{2} = \frac{x}{5}$, így $r = \frac{2}{5}x = \frac{2}{5} \cdot \frac{65}{17} = \frac{26}{17}$.

Helyes válasz(ok): B, C, D

3. Összesen hány olyan 11-gyel osztható háromjegyű szám létezik, amelyben akár az első két jegyet, akár az utolsó két jegyet cseréljük fel, prímszámot kapunk?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *3* **(E)** *4*

Megoldás: Legyen $\overline{abc}$ egy ilyen keresett szám, ekkor a 11-gyel oszthatóság feltétele miatt $11 \mid a-b+c$. Ez csak úgy teljesülhet, ha $a+c-b$ értéke 0 vagy 11. Mivel $\overline{bac}$ és $\overline{acb}$ prímszámok, ezért utolsó számjegyük (c, illetve b) csak 1, 3, 7 vagy 9 lehet.

Ha $a+c-b=0$ (azaz $a=b-c$), akkor $a>0$ miatt $b>c$ (vagyis $\overline{bc}$ értéke 31, 71, 73, 91, 93 vagy 97 lehet), így a következő számokat kell megvizsgálnunk: 231, 671, 473, 891, 693, 297. Ezek közül biztosan nem megfelelők azok a számok, amelyekben a számjegyek összege osztható 3-mal (hiszen ekkor a számjegyek felcserélésével kapott szám is osztható 3-mal). Ilyenek a következők: 231, 891, 693, 297. A 473 sem megfelelő, mert $437 = 19 \cdot 23$. A 671 viszont megfelelő, mert a 761 és a 617 prímek.

Ha $a+c-b=11$ (azaz $a=b-c+11$), akkor $a<10$ miatt $b-c+11<10$, így $b<c-1$ (vagyis $\overline{bc}$ értéke 13, 17, 19, 37, 39 vagy 79 lehet), így a következő számokat kell megvizsgálnunk: 913, 517, 319, 737, 539, 979. Ezek közül nem megfelelők: 913 ($931=7^2 \cdot 19$), 319 ($391=17 \cdot 23$), 737 ($377=13 \cdot 29$) és 979 ($799=17 \cdot 47$). Megfelelő viszont az 517 (157 és 571 prímek), valamint az 539 (359 és 593 prímek).

Tehát összesen 3 megfelelő háromjegyű szám létezik (671, 517, 539).

Helyes válasz(ok): D

4. Nyolc valós szám összege $\frac{4}{3}$, és közülük bármely hétnek az összege pozitív. Mi a legkisebb egész érték, amit nyolc ilyen szám közül valamelyik felvehet?

(A) *–9* **(B)** *–7* **(C)** *–5* **(D)** *–3* **(E)** *–1*

Megoldás: Legyen a nyolc vizsgált szám $a_1 \le a_2 \le ... \le a_8$, amelyekre teljesül, hogy $a_1 + a_2 + ... + a_8 = \frac{4}{3}$. Nyilvánvalóan $a_8 > 0$, hiszen ellenkező esetben az $a_1 + a_2 + ... + a_7$ összeg nem lehetne pozitív.

Abból, hogy $a_1 + a_2 + ... + a_7 > 0$, következik, hogy $a_8 < \frac{4}{3}$. De ezekből az is következik, hogy $a_2 + a_3 + ... + a_7 \le 6a_8 < 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$, és így $a_1 > -8$. Tehát a_1 lehetséges legkisebb egész értéke –7 vagy ennél nagyobb szám.

Megmutatjuk, hogy $a_1 = -7$ lehetséges.

Ha $a_1 = -7$ esetén $a_2 = a_3 = ... = a_8 = \frac{25}{21}$, akkor a nyolc szám összege $-7 + 7 \cdot \frac{25}{21} = 7 \cdot \left(-1 + \frac{25}{21}\right) = 7 \cdot \frac{4}{21} = \frac{4}{3}$, és mivel a hét legkisebb szám összege $-7 + 6 \cdot \frac{25}{21} = \frac{50}{7} - 7 > 0$, így bármely hét szám összege legalább ennyi, az-az pozitív.

Vagyis a nyolc szám között a –7 a legkisebb egész érték, ami előfordulhat.

Helyes válasz(ok): B

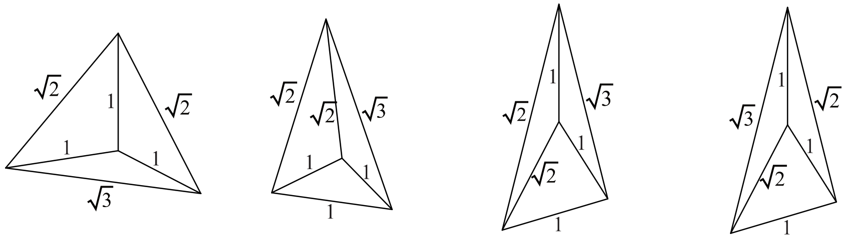
5. Adott egy tetraéder, amely éleinek hossza 1; 1; 1; $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$ és $\sqrt{3}$. Anna beszínezte ennek a tetraédernek az összes olyan lapját, amelyik lap derékszögű háromszög. Összesen hány lapot színezhetett be Anna?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *3* **(E)** *4*

Megoldás: Mivel egy tetraéder bármely éléhez pontosan egy kitérő él található (és négy olyan, amely csatlakozik hozzá), ezért a három 1 hosszúságú él között biztos lesz kettő, amelyek egymáshoz csatlakoznak. A harmadik 1 hosszúságú él ehhez képest háromféleképpen helyezkedhet el:

- a három 1 hosszúságú él közös csúcsból indul
- a három 1 hosszúságú él egy szabályos háromszöget alkot
- az egyik 1 hosszúságú él két végéhez csatlakozik a másik két 1 hosszúságú él (de ezek a szélső élek egymáshoz nem csatlakoznak)

Ha a tükrözéssel vagy forgatással egymásba vihető eseteket nem tekintjük különbözőnek, akkor a tetraéder az első két esetben egyértelmű, az utolsó esetben pedig kétféle lehet aszerint, hogy van-e $\left(1;\,1;\,\sqrt{3}\right)$ oldalú háromszög vagy sem. Így a következő négy tetraédert kapjuk:



1. ábra 2. ábra 3. ábra 4. ábra

Az egyes lapok derékszögűségét a Pitagorasz-tétel megfordításával ellenőrizhetjük.
Például egy $\left(1;\,\sqrt{2};\,\sqrt{3}\right)$ oldalú háromszögben $1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$ teljesül, így ez a háromszög derékszögű. Egy $\left(1;\,\sqrt{2};\,\sqrt{2}\right)$ oldalú háromszögben semelyik két oldal négyzetének összege nem egyenlő a harmadik oldal négyzetével (ezt valójában elég a két legrövidebb oldal négyzetére ellenőrizni), tehát ez a háromszög nem derékszögű.
Az előző ábrákon látható négy tetraéder derékszögű lapjai a következők:

1. ábra: $\left(1;\,1;\,\sqrt{2}\right)$ és $\left(1;\,1;\,\sqrt{2}\right)$, tehát 2 lap.

Nem derékszögű lapok: $\left(1;\,1;\,\sqrt{3}\right)$ és $\left(\sqrt{2};\,\sqrt{2};\,\sqrt{3}\right)$.

2. ábra: $\left(1;\,\sqrt{2};\,\sqrt{3}\right)$ és $\left(1;\,\sqrt{2};\,\sqrt{3}\right)$, tehát 2 lap.

Nem derékszögű lapok: $\left(1;\,1;\,1\right)$ és $\left(1;\,\sqrt{2};\,\sqrt{2}\right)$.

3. ábra: $\left(1;\,1;\,\sqrt{2}\right)$ és $\left(1;\,\sqrt{2};\,\sqrt{3}\right)$, tehát 2 lap.

Nem derékszögű lapok: $\left(1;\,1;\,\sqrt{3}\right)$ és $\left(1;\,\sqrt{2};\,\sqrt{2}\right)$.

4. ábra: $\left(1;\,1;\,\sqrt{2}\right)$, $\left(1;\,1;\,\sqrt{2}\right)$, $\left(1;\,\sqrt{2};\,\sqrt{3}\right)$ és $\left(1;\,\sqrt{2};\,\sqrt{3}\right)$, tehát 4 lap.

Vagyis Anna összesen 2 vagy 4 lapot színezhetett be.

Helyes válasz(ok): C, E