BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2011. NOVEMBER 26.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

3. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Egy fa tövétől a fára mászik fel egy csiga. Nappalonként 3 métert mászik felfelé, de éjszakánként 2 métert visszacsúszik. Az indulástól számított 10. nap délutánjáig felér a csúcsra. Milyen magas a fa?

Megoldás:
A csiga naponta 1 méterrel jut magasabbra (*1 pont*). Az első este 3, a második este 4, a harmadik este 5, és így tovább, a tizedik este 12 méter magasságig jut fel, tehát a fa 12 méter magas (*1 pont*).

Megjegyzés: Mivel a 10. napon délután ér fel a csiga a csúcsra, ezért (indoklással) az a válasz is elfogadható, hogy a fa 11 méternél magasabb, de legfeljebb 12 méter magas.

2. feladat (*5 pont*):
Anna és Bea, illetve Bea és Cili életkora között 2-2 év a különbség. Hárman együtt 30 évesek. Ki hány éves, ha mind különböző életkorúak, és születési idejük sorrendje a keresztneveik betűrendjével egyezik meg?

Megoldás:
Mivel a gyerekek születési idejének sorrendje a keresztneveik betűrendjével egyezik meg, ezért Anna a legidősebb (ő született legkorábban), Bea a középső és Cili a legfiatalabb (*1 pont*). Ha Anna 2 évvel fiatalabb és Cili 2 évvel idősebb volna, az életkoruk összege nem változna, és így mindhárman egyforma idősek lennének (*2 pont*; *ha szakaszos ábrázolással jutnak ugyanerre a gondolatra, arra is 2 pont adható*), vagyis egyenként $30:3=10$ évesek (*1 pont*). Tehát valójában Cili 8, Bea 10, Anna pedig 12 éves (*1 pont*). *Teljes értékűnek tekintjük a próbálgatással történő megoldást is.*

3. feladat (*3 pont*):
A KÉTFÉLÉK szigetén csak kétféle ember lakik: igazmondók, akik mindig igazat mondanak, illetve hazudósok, akik mindig hazudnak. Megkérdeztük az egyik szigetlakót: „Te igazmondó vagy?” Milyen választ fogunk kapni? Miért?

Megoldás:
A válasz biztosan igen lesz (*1 pont*). Ha igazmondót kérdezünk, igennel kell válaszolnia (*1 pont*), ha pedig hazudóst, neki nem szabad igazat mondania, tehát ő is igennel fog válaszolni (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2011. NOVEMBER 26.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

4. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Egy dobozban 10 kg liszt van. Rendelkezésünkre áll egy kétkarú mérleg, valamint egy 2 kg tömegű súly. Hogyan mérhetünk ki csak ezek segítségével 3 kg lisztet?

Megoldás:
Először a mérleg segítségével két egyenlő részre osztjuk a 10 kg-ot (*1 pont*). Ezután a 2 kg-os súly segítségével az egyik 5 kg-ból elveszünk 2 kg-ot, és ezzel kimértük a 3 kg-ot (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
Anna, Bori és Cili három olyan kártyával játszanak, amelyekre egy-egy pozitív egész szám van írva. Egy menet abból áll, hogy mindegyikük kap egy kártyát, és annyi pontot szerez, amennyi a kártyán szerepel. Három menet után Annának 10, Borinak 20, Cilinek pedig 9 pontja lett. Ki milyen kártyát kapott az első menetben, ha az utolsó menetben Annához került a legtöbb pontot érő kártya?

Megoldás:
Anna a végén a legtöbbet érő lapot kapta, és előtte legalább 1+1 pontot gyűjtött, ezért a legnagyobb kártyán legfeljebb 8 állhatott (*1 pont*). Nézzük meg, lehetett-e pontosan 8 a legnagyobb szám. Ha igen, akkor Anna a végén 8, előtte pedig 1-1 pontot szerzett, így a kártyák között biztosan van 1 és 8. Mivel Cili egyszer sem kaphatta a legnagyobb kártyát, Anna pedig csak egyszer kapta, így Borihoz kétszer kellett kerülnie a 8-asnak. Bori gyűjtötte a legtöbb pontot, 20-at, tehát a harmadik kártyán 4-esnek kellett állnia (*1 pont*). A pontokból kiderül, hogy Cili kétszer kapott 4-et és egyszer 1-et. Tudjuk még, hogy a legnagyobb kártyát, a 8-ast az utolsó menetben Anna kapta, így az egyes menetekben a lapjárás a következő volt (*1 pont*):

	1. menet	2. menet	3. menet	Összesen
Anna	1	1	8	10
Bori	8	8	4	20
Cili	4	4	1	9

Ha a legnagyobb kártyán 8-nál kisebb szám szerepelne, akkor Bori 20 pontja csak $7+7+6$ alakban állhatna elő, vagyis a második legnagyobb kártyán 6-osnak kellene lennie. Ekkor viszont Anna 10 pontja csak $7+2+1$ alakban jönne ki, de nem lehet a kártyák között 1, 2 és 6 is, ha a 7 a legnagyobb (*1 pont*).
Így megállapíthatjuk, hogy csak egy megoldás van, a fent megadott, ahonnan kiolvasható, hogy az első menetben Anna 1, Bori 8, Cili pedig 4 pontot szerzett (*1 pont*).

Megjegyzés: egy másik elindulási lehetőség a következő. A három menet után mindhárom kártya háromszor került egy-egy gyerek kezébe, ez összesen $10+20+9=39$ pontot jelentett, tehát a három kártyán szereplő számok összege $39:3=13$. (Ha egy csapat ezen az úton csak idáig jut el, 2 pontot kap.)

3. feladat (*3 pont*):
Az a, b, c, d olyan természetes számok, hogy $a-8=b+7=c-7=d+8$. Rendezzétek növekvő sorrendbe az a, b, c, d számokat!

Megoldás:
Ahhoz, hogy a négy művelet eredménye egyenlő legyen, a betűk közül az a legkisebb, amelyiket a legtöbbel kellett növelni; és az a legnagyobb, amelyikből a legtöbbet kellett kivonni (*1 pont*). Hasonló módon állapítjuk meg a sorrendben a másodikat (*1 pont*) és a harmadikat (*1 pont*) is. Így a növekvő sorrend: $d<b<c<a$.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2011. NOVEMBER 26.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

5. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Tizenkét pozitív egész szám összege 77. Mutassátok meg, hogy a tizenkét szám között biztosan van legalább két egyforma!

Megoldás:
Tegyük fel, hogy mind a 12 szám különböző (*1 pont*). A tizenkét legkisebb különböző pozitív egész szám összege $1+2+...+12=78$, ami már több 77-nél. Tehát nem lehet mindegyik szám különböző, így legalább két egyforma van közöttük. (*1 pont*)

2. feladat (*5 pont*):
Egy fáradhatatlan szöcske a számegyenes 2011-nek megfelelő pontjából indulva felváltva ugrik 8-at előre (pozitív irányba; jobbra) és 11-et hátra (negatív irányba; balra). Hányadik ugrása után lesz a legközelebb a 0-hoz?

Megoldás:
Egy dupla ugrással a szöcske 3-mal közelít a 0-hoz (*1 pont*), így 670 dupla ugrással $670\cdot 3=2010$-zel jut közelebb, vagyis $2\cdot 670=1340$ ugrással eljut az 1-hez (*2 pont*). További 3 dupla ugrással a -8-hoz érkezik, ahonnan egy előre ugrással éppen a 0-ban lesz. Tehát $1340+3\cdot 2+1=1347$ ugrással lesz a legközelebb a 0-hoz, amikor pontosan a 0-ban lesz (*2 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
A mellékelt 3×3-as négyzetrács minden mezőjében kezdetben a 0 állt. Egy lépésben Karcsi kiválasztotta a négyzetrács valamelyik 2×2-es részét, és az ott található számok mindegyikét 1-gyel megnövelte. 2011 lépés után alakult ki az itt látható állapot. Milyen szám áll az *a* és *b* betűk helyén?

513	*b*	497
c	*a*	*d*
554	*e*	447

Megoldás:
Bármelyik 2×2-es részt választotta is Karcsi, az *a*-val jelölt mező mindig belekerült, így *a* értéke mind a 2011 lépésben 1-gyel nőtt, tehát $a=2011$ (*1 pont*). A *b*-vel jelzett mezőben a szám akkor nőtt 1-gyel, amikor a bal felső vagy a jobb felső 2×2-es részt választotta Karcsi, ilyenkor a bal felső vagy a jobb felső szám nőtt 1-gyel (de a két szám soha nem nőtt egyszerre). Így $b=513+497=1010$ (*2 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2011. NOVEMBER 26.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

6. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Egy hatalmas kerek asztal köré 36 széket helyeztek el úgy, hogy a szomszédosak egymástól egyenlő távolságra vannak. Mutassátok meg, hogy bárhogyan is ül le ezekre a székekre 19 fiú és 17 lány, mindig lesz két fiú, akik egymással szemben ülnek! (Minden széken egy személy ül.)

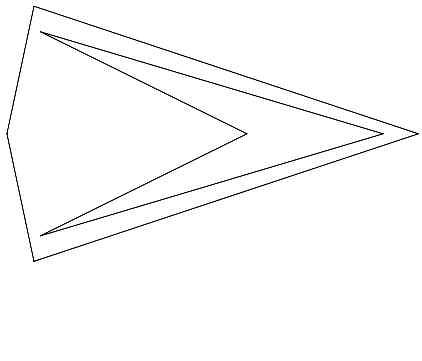
Megoldás:
Csoportosítsuk a székeket úgy, hogy 2 szemközti szék alkosson egy párt. Így 18 pár jön létre (*1 pont*). Mivel a fiúk száma 19, legalább egy párra 2 fiú jut (vagy: mivel a lányok száma 17, lesz olyan pár, amelyikre nem jut lány, tehát két fiú lesz benne), így ebben a párban a két fiú egymással szemben ül (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
A kevevári kovács a fejedelem minden lovát új patkókkal látta el. Hány lova lehet a fejedelemnek, ha minden patkót ugyanannyi szöggel (legalább 2-vel) rögzítettek, és összesen 1284 patkószöget használtak fel?

Megoldás:
Minden lónak 4 lába van, így minden lóra 4 patkó került (*1 pont*). Ha minden patkót n szöggel rögzítettek és l a lovak száma, akkor $4 \cdot n \cdot l = 1284$ (*1 pont*), ahonnan $n \cdot l = 321$. Mivel $321 = 3 \cdot 107$, így egy patkót 3 vagy 107 szöggel rögzíthettek (*2 pont*). Ebből a 107 szög egyetlen patkóba valószerűtlen, ezért a 107 csak a lovak száma lehet (*1 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
Igaz-e, hogy ha két négyszög közül az egyik a belsejében tartalmazza a másikat, akkor a belső négyszög kerülete kisebb, mint a külső négyszögé? Válaszotokat indokoljátok!

Megoldás:
Nem igaz (*1 pont*), lásd például az ábrát (*2 pont*):



BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2011. NOVEMBER 26.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

7. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Adott egy körön 20 piros és 1 zöld pont. Tekintsük az összes olyan sokszöget, amelynek csúcsai ezen pontok közül valók. Melyik sokszögből van több: amelyiknek minden csúcsa piros, vagy amelyiknek van zöld csúcsa is?

Megoldás:
Abból a sokszögből van több, amelyiknek van zöld csúcsa is (*1 pont*). Ha egy sokszögnek minden csúcsa piros, akkor a csúcsok közé beiktathatjuk a zöld csúcsot, így minden csak piros csúcsú sokszöghöz találtunk egy olyat, amelyiknek zöld csúcsa is van. Viszont léteznek még olyan háromszögek is, amelyeknek 2 piros és 1 zöld csúcsa van, ezeket még nem számoltuk meg, vagyis ennyivel több zöld csúccsal is rendelkező sokszöget kapunk (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
Egy kosárlabda-bajnokságon 14 csapat vesz részt. Minden csapat minden másik csapattal egyszer játszik. Eddig 77 mérkőzést játszottak le, és mindegyik csapatnak ugyanannyi mérkőzése van még hátra. Hányszor játszik még egy-egy csapat?

Megoldás:
A 14 csapat összesen $\frac{14 \cdot 13}{2} = 91$ mérkőzést játszik egymással (*2 pont*). Még hátra van $91 - 77 = 14$ mérkőzés (*1 pont*). Ha a 14 csapat mindegyike 1-1 mérkőzést játszik, az 7 mérkőzést jelent (mivel minden mérkőzést csapatpárok játszanak). Így a hátralévő 14 mérkőzéshez mindegyik csapatnak még 2-szer kell játszania (*2 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
Van-e olyan hatjegyű négyzetszám, amelynek számjegyei valamilyen sorrendben az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok? Válaszotokat indokoljátok!

Megoldás:
Nincsen (*1 pont*), mert a megadott jegyekből alkotható számok számjegyeinek összege mindig 21, amely osztható 3-mal (*1 pont*), de nem osztható 9-cel. (*1 pont*), így nem lehet négyzetszám.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2011. NOVEMBER 26.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

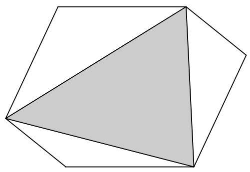
8. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Határozzátok meg az összes olyan $(a;\, b)$ egész számokból álló számpárt, amelyre teljesül a következő:

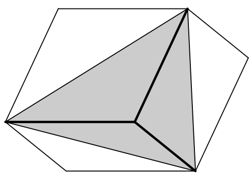
$$|a-b|+|5a-2011|\le 1$$

Megoldás:
Az $5a-2011$ kifejezés az a egyetlen egész értékére sem vehet fel 0-t, így $|5a-2011|>0$ (*1 pont*). Ezért az az egyedüli lehetőség, hogy $a-b=0$ és $|5a-2011|=1$. Ebből $5a-2011=1$ vagy $5a-2011=-1$ adódik (de az előbbi nem ad egész megoldást *a*-ra). Tehát $5a-2011=-1$, ahonnan $a=402$, így *b* értéke is 402. Vagyis az egyetlen megoldás a $(402;\, 402)$ számpár. (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
Az ábrán látható hatszög szemközti oldalai párhuzamosak és egyforma hosszúak. Mutassátok meg, hogy a hatszög belsejében a szürkített terület nagysága megegyezik a világos terület nagyságával!



Megoldás:
Húzzunk az ábrán látható csúcsokból az oldalakkal párhuzamos szakaszokat a hatszög belsejében (*2 pont*). Ekkor három paralelogramma keletkezik (*1 pont*), amelyeknek az átlói felezik az egyes paralelogrammák területét (*1 pont*). Ezzel beláttuk az állítást (*1 pont*).



3. feladat (*3 pont*):
Egy bicikli árát az árleszállítás alkalmával 20%-kal csökkentették, majd később a csökkentett árat 20%-kal növelték. Hogyan változott a bicikli ára az eredeti árhoz képest? Válaszotokat indokoljátok!

Megoldás:
Ha x az eredeti ár, akkor a csökkentés után $0{,}8\cdot x$ lesz az ár, majd ezt növelve $1{,}2\cdot 0{,}8\cdot x=0{,}96\cdot x$ a végső ár (*1 pont*). Tehát az ár csökkent (*1 pont*), mégpedig 4%-kal. (*1 pont*).