BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2019. NOVEMBER 23.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

3. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Adjatok példát hat olyan egymást követő, háromjegyű számra, amelyek leírásában összesen pontosan

a) 8 darab
b) 9 darab

kettes számjegy található! (Az egymást követő számok közt a különbség 1.)

Megoldás:

8 kettes számjeggyel: 216, 217, 218, 219, 220, 221
9 kettes számjeggyel: 228, 229, 230, 231, 232, 233

Helyes példánként *1-1 pont* jár.

2. feladat (*5 pont*):
Egy üzletben 3 csomag egyforma matrica van, mindegyik csomagban 100 matrica. Egyszerre érkezik 3 vásárló, akik közül az egyik 70, a másik 60 és a harmadik is 60 matricát kér. Ha 1 matrica megszámolása pontosan 1 másodpercbe telik, akkor összesen hány másodperc alatt tudnátok kiszámolni mindhárom vevőnek a kért matricákat, ha közületek valaki volna az eladó? Próbáljátok a lehető legrövidebb idő alatt kiszámolni!

Megoldás:
Az első csomagból kiszámol 30-at 30 másodperc alatt és a 100-as csomag többi 70 matricáját adja az első vásárlónak (*1 pont*). Utána a másik meg nem kezdett csomagból számol ki 30-at és még 10-et, ez 40 másodpercbe telik (*1 pont*). Így a most leszámolt 30-at és az előző csomagnál kiszámolt 30-at, tehát 30 + 30 = 60-at ad a második vásárlónak (*1 pont*), míg a második csomagban ottmaradt 60-at átadja a harmadik vásárlónak (*1 pont*). Tehát összesen 30 + 30 + 10 = 70 másodperc alatt ki lehet számolni (*1 pont*).
Ha egy csapat 70 + 60 +60 = 190 másodpercet válaszol, arra 1 pont jár. Ha 70 és 190 közötti idő alatt talál jó eljárást, arra 2 pont adható.

3. Villámkérdés (*3 pont*):
Egy háromjegyű szám jegyeinek összege 5. Mennyi lehet a számjegyek szorzata?

Megoldás:
A számjegyek szorzata 0, 3 vagy 4 (*1 pont*) lehet. Előfordulhat, hogy a számjegyek között van 0, ekkor a jegyek szorzata 0. Ha nem fordul elő 0 a számjegyek között, akkor csakis az 1, 1, 3 (*1 pont*) vagy 1, 2, 2 (*1 pont*) szerepelhet valamilyen sorrendben. Ezek szorzata 3 vagy 4.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2019. NOVEMBER 23.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

4. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Alkossatok 5 párt két eltérő módon is az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokból úgy, hogy mindegyik párban lévő két szám közti különbség 2 vagy 3 legyen.

Megoldás: (4;1), (5;2), (6;3), (9;7), (10;8) vagy (3;1), (4;2), (8;5), (9;6), (10;7). Helyes példánként *1-1 pont* jár.

2. feladat (*5 pont*):
A táblára egymás mellé felírtak nyolc számot úgy, hogy minden három egymás utáni szám összege 20, de csak az első és az utolsó számot nem takarták el.

5, *, *, *, *, *, *, 8

Fejtsétek meg a hiányzó számokat!

Megoldás: Ha a második, □-tel jelölt számot megismerjük, a harmadik már csak annyi lehet, ami az 5 és a második helyen lévő □ összegét 20-ra egészíti ki. (*1 pont*).

5, □, Δ, *, *, *, *, 8

Vagyis 5 + □ + Δ = 20. Így a negyedik számnak is 5-nek kell lennie, hiszen a második, harmadik és negyedik helyen lévők összege is 20 kell legyen, és már tudjuk, hogy a □ és Δ értékét 5 egészíti ki 20-ra.

5, □, Δ, 5, *, *, *, 8

Így nézve, rendre a következő három egymás utáni számot, megállapíthatjuk, hogy mennyi kell következzen:

5, □, Δ, 5, □, *, *, 8
5, □, Δ, 5, □, Δ, *, 8
5, □, Δ, 5, □, Δ, 5, 8 (*1 pont*)

Most pedig hátulról visszafelé figyelve, az utolsó három összege 20, így a Δ értéke 7 (*1 pont*), majd tovább jőve előre, azt kapjuk, hogy a □ értéke 8.
A keresett számsor tehát: 5, 8, 7, 5, 8, 7, 5, 8 (*2 pont*)
Indoklás nélkül a helyes számsorra *2 pont* adható.

3. Villámkérdés (*3 pont*):
Mi lehet a szabály a következő számsor felírásában? Mely számok hiányoznak?
102; 105; 111; 114; 120; 123; 129; ___; ___; ___; ___; ___; 201; 204; 210; 213; 219.

Megoldás:
Egy lehetséges szabály: mivel 105 = 102 + 3; 111 = 105 + 6; 114 = 111 + 3, stb., minden számot a számjegyei összegével kell növelni (*2 pont*), így keletkezik a következő szám. A hiányzó számok:
141; 147; 159; 174; 186, (*1 pont*) mert 141 = 129 + 12; 147 = 141 + 6; 159 = 147 + 12; 174 = 159 + 15; 186 = 174 + 12.
Minden más helyes szabályt és abból következő hiányzó számot elfogadunk és ezzel arányosan pontozunk.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2019. NOVEMBER 23.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

5. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Csak egy 10 literes és egy 6 literes edény segítségével egy folyóból hogyan mérnétek ki pontosan 8 liter vizet?

Megoldás:
Több helyes út is van. Egy lehetőséget mutat az alábbi táblázat.

	10 literes edény	**6 literes edény**	
Kezdetben	0	0	
1. lépés	10	0	tele merítem a 10 literest
2. lépés	4	6	a 10 literesből a 6 literest teletöltöm
3. lépés	4	0	kiürítem a 6 literest
4. lépés	0	4	a tízliteresből a 4 litert áttöltöm a 6 literesbe
5. lépés	10	4	telemerítem a 10 literest
6. lépés	**8**	6	a 10 literesből teletöltöm a 6 literest, így benne 8 liter marad

Ha nem sikerül megoldani, de próbálkoznak olyan töltögetéssel, amivel 2 vagy 4 litert sikerül előállítsanak, arra *1 pont* jár. A teljes megoldás *2 pont*-ot ér.

2. feladat (*5 pont*):
Adjatok két különböző példát hét olyan egymást követő, négyjegyű számra, amelyek leírásában pontosan 16 kettes számjegy található! (Az egymást követő számok közt a különbség 1.)

Megoldás:
Két megfelelő példát láthatunk alább:

2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235

2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221

Első helyes példa *2 pont*, második helyes példa *3 pont*.

3. Villámkérdés (*3 pont*):
Bendegúz a következő betűrejtvényt írta fel: $AB \cdot CD = EFGHI$
Mennyi lehet ebben I értéke?

Megoldás:
Semennyi (*1 pont*). Ugyanis két kétjegyű szorzata kevesebb mint
$100 \cdot 100 = 10\,000$ (*1 pont*), vagyis legfeljebb négyjegyű lehet, tehát ötjegyű nem (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2019. NOVEMBER 23.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

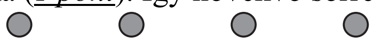
6. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Ha egy téglalap egyik oldalát 99 cm-rel növeltük és ennek szomszédos oldalát 1 cm-rel csökkentettük, akkor az eredeti téglalap területe nőtt vagy csökkent? Válaszotokat indokoljátok is!

Megoldás:
Növekedhetett, csökkenhetett, de változatlan is maradhatott.
Ha a téglalap méretei centiméterben 2×100 volt, és a 2 cm-es oldalt csökkentettük 1 cm-rel és a 100 cm-es oldalt növeltük 99 cm-rel, akkor az eredeti 200 cm^2-ről a terület lecsökkent 198 cm^2-re.
Ha a téglalap méretei centiméterben 10×10 volt, akkor ezt 9×109-esre változtattuk, így a terület 100 cm^2-ről 981 cm^2-re nőtt.
Ha a téglalap méretei centiméterben 11×990 volt, akkor ezt 10×1089-esre változtattuk, így a terület mindkét esetben 10 890 cm^2, tehát nem változott. (A 2×99 is jó példa, ha az 1×198-ra változik)
Ha jó a válasz, és ha még példával is legalább két lehetőséget alátámasztanak, akkor (1 pont) jár érte. Önmagában a jó válaszért nem jár pont.

2. feladat (*5 pont*):
Létezik-e négy olyan szám, amelyek között a páronkénti különbségek 2, 2, 3, 4, 5, 6?

1.megoldás:
Nem létezik (*1 pont*). Tegyük fel, hogy van négy ilyen szám. Mivel egyetlen különbség sem 0, ezért a négy szám között nincs két egyforma (*1 pont*). Így növekvő sorrendbe állíthatjuk őket,



és a legnagyobb valamint a legkisebb közti különbség ekkor 6.
Többféleképpen is ellentmondásra juthatunk.
Például: az egymást követő szomszédos számok közti különbségek összege szintén 6 kell legyen (*1 pont*), ám a lehetséges legkisebb köztes különbségek valamilyen sorrendben a 2, 2, 3 lehet (*1 pont*),

de ezek összege 7, több 6-nál (*1 pont*). Ezért nem létezik négy, a feltételeknek megfelelő szám.

2. megoldás:
Ha megvizsgáljuk páros és páratlanság szempontjából a négy számot, az összes lehetséges módozattal (*2 pont*), azt kapjuk, hogy a páratlan különbségek száma összesen 0, 3 vagy 4 lehet (*2 pont*), de kettő sosem, ezért nem létezik négy ilyen szám (*1 pont*).

3. Villámkérdés (*3 pont*):
Egy tört számlálóját 3-mal, a nevezőjét 7-tel növeltem, és így a tört értéke ugyanaz lett. Melyik ez a tört? Hogyan találtatok rá?

Megoldás: $\frac{3}{7}$ (*2 pont*). Egy tört értéke nem változik, ha például a számláló és nevező is megduplázódik. Itt ez akkor jelent duplázódást, ha a számláló eleve 3 és a nevező 7 volt. (*1 pont*)

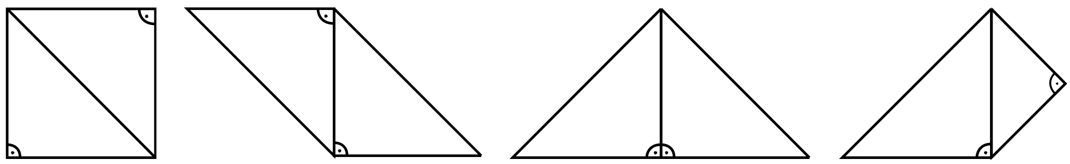
BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2019. NOVEMBER 23.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

7. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Egy négyszöget, annak egyik átlója két egyenlőszárú, derékszögű háromszögre bont. Hány fokosak lehetnek egy ilyen négyszög szögei?

Megoldás:
Gondolkozzunk visszafelé. Valamelyik oldaluk mentén illesszünk össze két egyenlőszárú derékszögű háromszöget! Ezt az alábbi négy módon tehetjük meg, de közülük csak három lesz négyszög (az utolsó előtti illesztésnél háromszöget kapunk):



Ezeknek a szögei:
az elsőnél mindegyik 90°, a másodiknál kettő 45° és kettő 135°, az utolsónál pedig kettő 90°, egy 45° és egy 135°. Két négyszög szögeinek megtalálásáért *1 pont*, három megtalálásáért *2 pont* jár.

2. feladat (*5 pont*):
Írjátok be a 3×3-as táblázat mezőibe 1-től 9-ig az összes számjegyet (mindegyikbe egyet) úgy, hogy a lehető legtöbb sorban és oszlopban a számok összege négyzetszám legyen! Indokoljátok, miért ez a legtöbb!

Megoldás:
Az összeg valamely sorban vagy oszlopban legalább 1 + 2 + 3 = 6, és legfeljebb 7 + 8 + 9 = 24 (*1 pont*). Mivel négyzetszámot kívánunk összegként megkapni, ezért az csak 9 vagy 16 lehet (*1 pont*). Ha sikerülne három sorban is létrehozni négyzetszámot összegként, akkor a táblázat összes mezőjének összege csak a következő négyféle lehetne: 9 + 9 + 9 = 27, 9 + 9 + 16 = 34, 9 + 16 + 16 = 41, 16 + 16 + 16 = 48 (*1 pont*), ám ezek egyike sem egyezik a kilenc mező valódi összegével, ami 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.

3	1	5
2	6	8
4	9	7

Így legfeljebb két sorban lehet a számok összege négyzetszám. Hasonlóan beláthatjuk, hogy legfeljebb két oszlopban lehet a számok összege négyzetszám (*1 pont*). Az itt látható elrendezésben 2 sor és 2 oszlop számjegyeinek összege is négyzetszám (*1 pont*). Így a lehető legtöbbre mutattunk példát.

3. Villámkérdés (*3 pont*):
Mennyi a következő műveletsor eredménye?

$$2019 \cdot 201820182018 - 2018 \cdot 201920192019$$

Megoldás:
0 (*2 pont*). Mivel 201820182018 = 2018 · 100010001 és 201920192019 =2019 · 100010001, ezért

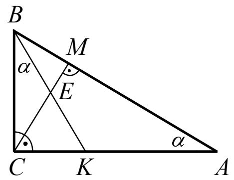
$$2019 \cdot 201820182018 - 2018 \cdot 201920192019 =$$
$$= 2019 \cdot 2018 \cdot 100010001 - 2018 \cdot 2019 \cdot 100010001 = 0.$$ (*1 pont*)

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2019. NOVEMBER 23.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

8. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magassága CM (M az AB-n), és K olyan pont az AC befogón, hogy $KBC\sphericalangle = BAC\sphericalangle$. Ha CM és KB metszéspontja E, mutassátok ki, hogy $EK = EB$.



Megoldás: $MCB\sphericalangle = CAB\sphericalangle = \alpha$, mivel mindkettő ABC pótszöge, ezért $MCB\sphericalangle$ azonos $CBK\sphericalangle$-gel is, így CEB egyenlőszárú háromszög (*1 pont*). Mivel $KCE\sphericalangle$ és $CKE\sphericalangle$ egyaránt $90 - \alpha$, ezért CEK is egyenlőszárú, így $CE = KE = EB$ (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
A pusztaszeri lovasverseny döntőjébe, amit körpályán bonyolítottak le, Atilla, Béla és Vajk jutott. Atilla minden egyes kört 2 másodperccel hamarabb tett meg, mint Béla, és Béla 3 másodperccel hamarabb, mint Vajk. Amikor Atilla megnyerte a versenyt, Béla pontosan 1 körrel, Vajk pedig 2 körrel tett meg kevesebbet Atillánál. Hány körből állhatott a pusztaszeri lovasverseny döntője?

Megoldás:
Jelölje n az Atilla által megtett körök számát, vagyis amit keresünk, és t azt az időt másodpercben kifejezve, amennyi alatt Atilla egy kört megtett. Ekkor a verseny kezdetétől Atilla célba jutásáig $t \cdot n$ másodperc telt el (*1 pont*). Mivel Béla ez idő alatt $n – 1$ kört tett meg, minden kört $t + 2$ másodperc alatt és Vajk $n – 2$ kört, körönként $t + 5$ másodperc alatt (*1 pont*), ezért

$$\begin{cases} t \cdot n = (t+2)(n-1) \\ t \cdot n = (t+5)(n-2) \end{cases} \qquad (\textit{1 pont})$$

Mivel a bal oldalon szereplő kifejezések mindkét egyenletben egyformák, ezért
$(t+2)(n-1) = (t+5)(n-2) \Leftrightarrow tn - t + 2n - 2 = tn - 2t + 5n - 10 \Leftrightarrow t = 3n - 8$ (*1 pont*)
ezt beírva az első egyenletbe:
$(3n-8)\cdot n = (3n-8+2)\cdot(n-1) \Leftrightarrow 3n^2 - 8n = 3n^2 - 8n + 2n - 3n + 8 - 2$, és innen $n = 6$.
Ebből kapjuk továbbá, hogy $t = 10$ és ellenőrizve valóban megoldása az egyenletrendszernek $t = 10$ és $n = 6$.
Így a lóversenyen 6 kört kellett megtenni. (*1 pont*).

3. Villámkérdés (*3 pont*):
Két csapat 10 sportágban mérte össze a tudását. Sportáganként a győzelemért 4, döntetlenért 2, vereségért 1 pontot kaptak. Hány döntetlen lehetett, ha a két csapatnak összesen 46 pontja lett?

Megoldás:
Döntetlennél 4, a többi esetben 5 pontot gyűjtöttek összesen (*1 pont*). Ha mindig 5 pontot gyűjtöttek volna, 50 pontjuk lenne együtt a végén (*1 pont*), de 46 van, így 4 sportágnál egy-egy ponttal kevesebbjük lett együtt, ezért 4 döntetlen lett (*1 pont*).