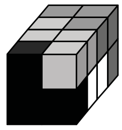
BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2022. DECEMBER 3.)

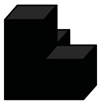
FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

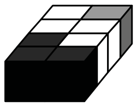
3. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Az itt látható egyforma kiskockákból készült építmény négy olyan részből lett felépítve, amelyek mindegyike ugyancsak négy azonos színű kiskockából áll. Állapítsátok meg, és rajzoljátok le, hogyan nézhet ki az építmény alsó szintje!



Megoldás:
A harmadik fekete egyetlen helyen ragasztható a fekete részhez, csakis úgy ahogy az alább látható (*1 pont*).





Így az építmény alsó szintje csakis a fent jobbra látható elrendezésben lehetséges (*1 pont*). A pont akkor is jár, ha az alsó szintnek csak a 8, egy síkban lévő négyzetlapját rajzolják le helyesen.

2. feladat (*5 pont*):
Írjatok be számjegyeket a négyzetek helyére úgy, hogy a felírt helyes

□□□−□□= 23

kivonásban mind a hét számjegy különböző legyen! Keressétek meg az összes lehetőséget!

Megoldás:
Egy lehetséges megfejtés a következő. Az egyesek helyén a 3-as különbség $4-1$, $7-4$, $8-5$, $9-6$, $0-7$, $1-8$ különbségekből lehetséges (mivel a 2-es és 3-as számjegy már szerepel a hét számjegy között) (*1 pont*). Végigvizsgálva a lehetőségeket azt kapjuk, hogy csak a $107-84=23$ (*2 pont*) és $109-86=23$ (*2 pont*) beírás lehetséges.
Egy másik megfejtési mód kiindulhat abból, hogy a háromjegyű (a kisebbítendő) legalább 104, a kivonandó így biztosan több 80-nál.

3. feladat (*16 pont*):
Helyezzetek a 2 2 2 2 = 5 5 5 5 5 sorba összeadás, kivonás, illetve osztás jeleket úgy, hogy igaz legyen az egyenlőség. Írjatok le négy eltérő megoldást! Két megoldás akkor különböző, ha a műveletsor végeredménye más.

Megoldás:
$2+2+2:2=5+55-55$ $2+2+2-2=5-55:55$ $22:22=55:5-5-5$ $2+2-2:2=5-5:5-5:5$
Minden eltérő felírásért *4-4 pont* jár.

4. feladat (*3 pont*):
Pistinek 60 *Ft*-tal több pénze van, mint húgának, Julinak. Ha Pisti Julinak ad 40 *Ft*-ot, akkor melyiküknek lesz több pénze és mennyivel?

Megoldás:
Julinak (*1 pont*) 20 *Ft*-tal (*2 pont*).
Ha a válasz az, hogy Pistinek 20 *Ft*-tal, akkor összesen 1 pont adható.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2022. DECEMBER 3.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

4. osztály

1. feladat (*2 pont*):
A táblán van egy szám. Egy lépésben a legutóbbi számot vagy duplázni szabad, vagy letörölni az utolsó számjegyét. Jussatok el így a 20-tól 25-höz és a 49-től az 50-hez!

Megoldás:
A következő lépések egy lehetséges megoldást mutatnak.

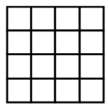
$$20 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 32 \to 64 \to 128 \to 256 \to 25$$ (*1 pont*)

$$49 \to 4 \to 8 \to 16 \to 32 \to 64 \to 128 \to 256 \to 25 \to 50$$ (*1 pont*)

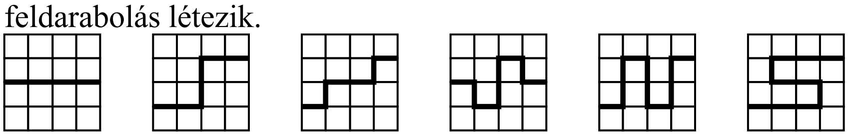
2. feladat (*5 pont*):
Egy rajzfilm hossza percekben mérve egész szám. Leírtam a film kezdésének és a befejezésének időpontját, ahogyan azt a digitális órám jelzi. Az óra 24 órás üzemmódban írja ki az időt, és mindig pontosan 4 számjegyet jelez ki. A kezdő és befejező időpont 8 számjegye mindegyike különböző, például: 09:47 vagy 21:36. Legkevesebb hány percig tarthat ez a film?

Megoldás:
36 percig (*1 pont*). Ha a kezdés és a befejezés időpontja 19:58 és 20:34, akkor a film 36 perces.
A két időpontban szereplő 8 számjegy mind különböző kell legyen. Két egymást követő óra kijelzésére 4 különböző számjegyet csak 19 és 20 órák esetén használunk (*1 pont*). Ezeknek az időpontoknak a kiírásához felhasználjuk a 0, 1, 2 és 9 számjegyeket (*1 pont*).
Ha a 20 óra utáni perc kiírásához a legkisebb számjegyeket használjuk, akkor az 34 perc (*1 pont*). A 19 óra utáni perchez a legnagyobb számjegyeket használjuk, ez 58 perc (*1 pont*).

3. feladat (*16 pont*):
Daraboljátok fel a rácsvonalak mentén a 4×4-es rácsnégyzetet két részre úgy, hogy a keletkező darabok azonos alakúak és nagyságúak legyenek! Rajzoljátok le az összes különböző feldarabolást! (Két feldarabolás akkor különböző, ha az egyik feldarabolásban nincs olyan darab, amelyik fedésbe vihető a másik darabolás valamelyik darabjával.)



Megoldás:
Az alábbi hat eltérő feldarabolás létezik.

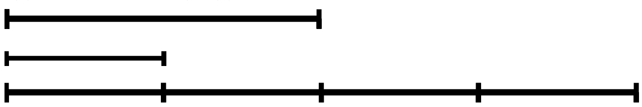


1 helyes ábra: *2 pont*; 2 helyes ábra: *4 pont*; 3 helyes ábra: *7 pont*;
4 helyes ábra: *10 pont*; 5 helyes ábra: *13 pont*; 6 helyes ábra: *16 pont*.

4. feladat (*3 pont*):
Egy szám felének a négyszerese 36. Mennyi a szám háromszorosa?

Megoldás:
Egy szám felének a négyszerese megegyezik a szám kétszeresével.

a szám
a szám fele
felének négyszerese



36

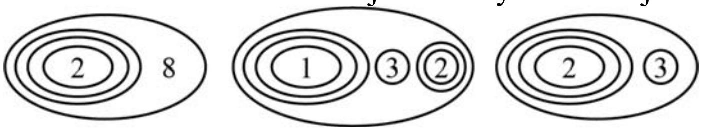
Így az eredeti szám $36 : 2 = 18$ (*2 pont*).
Ennek háromszorosa $18 + 18 + 18 = 54$ (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2022. DECEMBER 3.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

5. osztály

1. feladat (*2 pont*):
A körök földjén a 2008-at és az 1230-at az ábra szerint írják le. Milyen számot jelöl a harmadik ábra? Miért?



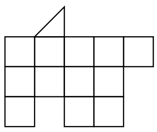
2008 1230 ?

Megoldás: Ez a szám a 2030 (*1 pont*). Minden számjegy körül annyi karika van, ahányadik számjegy hátulról számolva (a 0 jegyek nincsenek jelölve) (*1 pont*). Helyes érveléssel más megoldás is elfogadható.

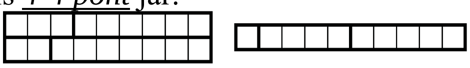
2. feladat (*5 pont*):
Négy egymás utáni matek szakkör mindegyikén 20 tanuló vett részt. 9-en voltak, akik pontosan három szakkörön, 5-en voltak, akik pontosan két szakkörön, és 3-an voltak, akik pontosan egy szakkörön vettek részt ezek közül. Pontosan hány tanuló volt mind a négy szakkörön?

Megoldás: A négy szakkörön való megjelenések össz-száma $4 \cdot 20 = 80$ (*1 pont*). Ebből a 80-ból $3 \cdot 9 = 27$ megjelenést produkált az a 9 tanuló (*1 pont*), akik három szakkörre mentek el, $2 \cdot 5 = 10$, akik kettőre (*1 pont*) és 3-at, akik egyre mentek el, vagyis összesen $27 + 10 + 3 = 40$-et (*1 pont*). Így akik mind a négy szakkörön voltak, ők $80 - 40 = 40$ megjelenést produkáltak, ezért az ő számuk (hisz mind a négy szakkörön ők ugyanazok a személyek voltak) $40 : 4 = 10$ (*1 pont*).

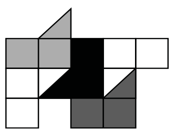
3. feladat (*16 pont*):
a) Az 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, 1×5, 1×6 és 1×7 méretű alakzatok mindegyikéből egy darabbal rendelkeztek. Csak ezek segítségével kirakható hézag és átfedés nélkül két olyan téglalap, melyeknek azonosak a kerületei. Rajzoljátok le ezt a két téglalapot úgy, hogy az alkotórészek láthatóak legyenek! Minden darabot a két téglalap közül pontosan az egyikben használhatjátok fel!
b) Daraboljátok fel az alábbi alakzatot öt azonos alakú és nagyságú részre!



Megoldás: a) Egyikre és másikra is *4-4 pont* jár.



b) A helyes feldarabolás *8 pontot* ér.



4. feladat (*3 pont*):
A táblázatok kitöltése mindkét esetben ugyanazon szabály szerint történt, és mindkét esetben ugyanaz a szám hiányzik a táblázatból. Melyik ez a szám? Miért?

1	7	8	2	7
3	2	8	3	
5	0	6	6	2

2	4	1	7	8
5	6	2	2	
8	0	4	0	3

Megoldás: Ez a szám az 5 (*1 pont*). Az első két sor összege található a harmadik sorban (*2 pont*). Helyes érveléssel más megoldás is elfogadható.

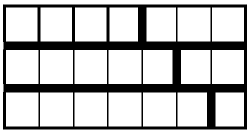
BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2022. DECEMBER 3.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

6. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Milyen nem 1 szélességű téglalap rakható ki hézagmentesen és átfedés nélkül a következő méretű hat kis téglalapból (az összeset fel kell használni): 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, 1×5, 1×6.

Megoldás: Ki lehet rakni 3×7-eset (*1 pont*). Így (*1 pont*).



2. feladat (*5 pont*):
Adjatok két különböző példát két olyan törtre, amelyek különbsége háromszor nagyobb a szorzatuknál.

Megoldás: Néhány megfelelő tört:
$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$; ugyanis $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{5}{10}-\frac{2}{5}=\frac{5-2}{10}=\frac{3}{10}$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$ és $\frac{3}{10}=3\cdot\frac{1}{10}$.
$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ ugyanis $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$ és $\frac{1}{6}=3\cdot\frac{1}{18}$. (Általánosan jó két ilyen tört: $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+3}$.)
Első jó példa *1 pont*, ellenőrzés *1 pont*, második jó példa *1 pont*, ellenőrzés *2 pont*.

3. feladat (16 *pont*):
A római számírásmódban $9=\mathrm{IX}=\mathrm{X}-\mathrm{I}$, vagyis az I-es számjegyet elvesszük X-ből, mert nagyobb értékű jegy előtt áll. Az arab számírásmódban is megtehetünk hasonlót: ha a számjegy fölé vonalat teszünk, akkor azon a helyi értéken levő számot elvesszük az addigi értékből, pl. $19=20-1=2\overline{1}$ („egy híján húsz”), vagy $256=300-44=3\overline{44}$, illetve $256=1060-804=1\overline{8}6\overline{4}$. Írjátok fel hasonló módon a 2022-t a lehető legtöbb féleképpen legfeljebb ötjegyű számként!

Megoldás: A következő tizenegy helyes felírás van: $203\overline{8}$, $21\overline{78}$, $21\overline{8}2$, $3\overline{978}$, $3\overline{98}2$, $1\overline{8}022$, $1\overline{8}03\overline{8}$, $1\overline{798}2$, $1\overline{7978}$, $1\overline{8}1\overline{8}2$, $1\overline{8}1\overline{78}$. Ugyanis:

$203\overline{8}=2030-8=2022$	$21\overline{78}=2100-78=2022$	$21\overline{8}2=2102-80=2022$
$3\overline{978}=3000-978=2022$	$3\overline{98}2=3002-980=2022$	$1\overline{8}03\overline{8}=10030-8008=2022$
$1\overline{8}022=10022-8000=2022$	$1\overline{798}2=10002-7980=2022$	$1\overline{8}1\overline{8}2=10102-8080=2022$
$1\overline{7978}=10000-7978=2022$	$1\overline{8}1\overline{78}=10100-8078=2022$	

6 helyes felírásig *1-1 pont*; 7 helyes felírás *8 pont*; 8 helyes felírás *10 pont*; 9 helyes felírás *12 pont*; 10 helyes felírás *14 pont;* 11 helyes felírás *16 pont*. Az ellenőrzésért nem jár pont.

4. feladat (*3 pont*):
Peti egy olyan szobában tartózkodik, amelynek egymás mellett 6 ajtaja van és közülük egy nincs kulcsra zárva (Peti nem tudja melyik). Egy kísérlet azt jelenti, hogy Peti 3 ajtót ellenőriz, hogy azok közül nyitva van-e valamelyik, és ha igen, akkor azon kimegy a szobából. Azonban, ha nem jut ki, akkor Karcsi minden kísérlet után kívülről bezárja azt az ajtót, ami éppen nyitva volt és kinyitja annak egyik szomszédos ajtaját, anélkül, hogy Peti ezt érzékelné. Legkevesebb hány kísérletre juthat ki biztosan Peti a szobából és hogyan? (Peti ismeri Karcsi startégiáját.)

Megoldás: 2-re (*1 pont*). Először minden második ajtót próbálja meg (*1 pont*). Ha nem jutott ki, akkor ezek valamelyik szomszédja volt nyitva. Így miután azt Karcsi bezárta, egy olyan ajtót fog kinyitni, amit az előbb próbált Peti. Tehát ha másodjára is ugyanazt a három ajtót próbálja (*1 pont*) meg Peti, mint először, akkor biztosan kijut.
Ha egy csapat 3 kísérletre ad megoldást, akkor csak a válaszra nem jár pont, de annak helyes indoklására összesen 1 pont jár.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2022. DECEMBER 3.)

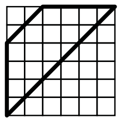
FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

7. osztály

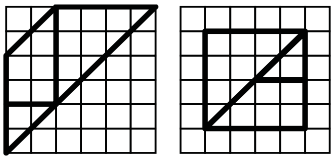
1. feladat (*2 pont*):
Meg lehet-e adni x, y és z helyére olyan egész számokat, amelyekre egy időben igaz, hogy $x > y$, $y^2 > z^2$, $z^3 > x^3$? Válaszotokat indokoljátok!

Megoldás: Igen, lehet (*1 pont*). Például $x = 1$, $y = -3$, $z = 2$. (*1 pont*). *Más helyes példát is elfogadunk.*

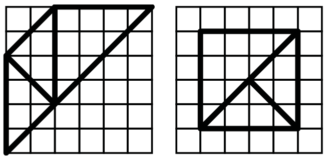
2. feladat (*5 pont*):
Daraboljátok fel két eltérő módon is az itt látható síkidomot három részre úgy, hogy azok mindegyikének felhasználásával átfedés és hézag nélkül négyzetet rakhassatok ki belőlük!



Megoldás:



és



Egy jó példa *2 pontot*, két jó példa *5 pontot* ér.

3. feladat (16 *pont*):
A római számírásmódban $9 = \mathrm{IX} = \mathrm{X} - \mathrm{I}$, vagyis az I-es számjegyet elvesszük X-ből, mert nagyobb értékű jegy előtt áll. Az arab számírásmódban is megtehetünk hasonlót: ha a számjegy fölé vonalat teszünk, akkor azon a helyi értéken levő számot elvesszük az addigi értékből, pl. $19 = 20 - 1 = 2\overline{1}$ („egy híján húsz”), vagy $256 = 300 - 44 = 3\overline{44}$, illetve $256 = 1060 - 804 = 1\overline{8}6\overline{4}$. Írjátok fel hasonló módon a 2022-t a lehető legtöbb féleképpen legfeljebb ötjegyű számként!

Megoldás: A következő tizenegy helyes felírás van: $203\overline{8}$, $21\overline{78}$, $21\overline{8}2$, $3\overline{978}$, $3\overline{98}2$, $1\overline{8}022$, $1\overline{8}03\overline{8}$, $1\overline{798}2$, $1\overline{7978}$, $1\overline{8}1\overline{8}2$, $1\overline{8}1\overline{78}$.
Ugyanis:

$203\overline{8} = 2030 - 8 = 2022$	$21\overline{78} = 2100 - 78 = 2022$	$21\overline{8}2 = 2102 - 80 = 2022$
$3\overline{978} = 3000 - 978 = 2022$	$3\overline{98}2 = 3002 - 980 = 2022$	$1\overline{8}03\overline{8} = 10030 - 8008 = 2022$
$1\overline{8}022 = 10022 - 8000 = 2022$	$1\overline{798}2 = 10002 - 7980 = 2022$	$1\overline{8}1\overline{8}2 = 10102 - 8080 = 2022$
$1\overline{7978} = 10000 - 7978 = 2022$	$1\overline{8}1\overline{78} = 10100 - 8078 = 2022$	

6 helyes felírásig *1-1 pont*; 7 helyes felírás *8 pont*; 8 helyes felírás *10 pont*; 9 helyes felírás *12 pont*; 10 helyes felírás *14 pont*; 11 helyes felírás *16 pont*. Az ellenőrzésért nem jár pont.

4. feladat (*3 pont*):
Egy előadáson minden dalt Ági, Bori, Csilla és Dóri közül hárman énekeltek és a negyedik tag zongorán kísérte. Ha Ági 8, Bori 6, Csilla 3 és Dóri 7 dalt énekelt, akkor összesen hány dalt kísért zongorán Bori?

Megoldás: Ha a lányok 8, 6, 3 és 7 dalát összeadjuk, akkor minden dalt háromszor veszünk figyelembe (*1 pont*). Így valójában $(8 + 6 + 3 + 7) : 3 = 24 : 3 = 8$ dalt énekeltek (*1 pont*). Bori a 8-ból 6-ot énekelt, ezért ő $8 - 6 = 2$ dalt kísért zongorán (*1 pont*).

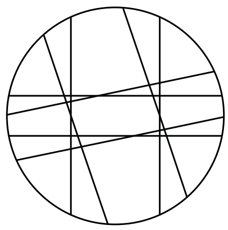
BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2022. DECEMBER 3.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

8. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Rajzoljatok egy körben 8 húrt úgy, hogy közülük mindegyik pontosan 5 másikat metsszen!

Megoldás: Jó ábra *2 pont*.



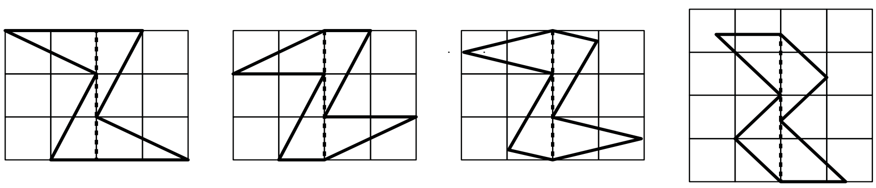
2. feladat (*5 pont*):
Az 1000 osztói közül legfeljebb hányat választhatunk ki úgy, hogy egyik se ossza semelyik másikat?

Megoldás: Legfeljebb 4-et (*1 pont*). A táblázat befestett mezőiben felsoroljuk az 1000 összes osztóját (*1 pont*). A 16 osztóból 4 osztót kiválaszthatunk úgy, hogy egyik sem osztója valamely másiknak, például a 8, 20, 50 és 125 számokat (*2 pont*). Többet nem, mert ha legalább 5 osztót választunk, akkor lesz közöttük kettő, amelyik a táblázat befestett részén ugyanabban a sorban, vagy ugyanabban az oszlopban áll, és akkor egyik szám osztója a másiknak (*1 pont*).

	1	2	4	8
1	1	2	4	8
5	5	10	20	40
25	25	50	100	200
125	125	250	500	1000

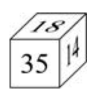
3. feladat (16 *pont*):
Rajzoljatok olyan sokszöget, amelyet egyetlen egyenessel négy azonos alakú és nagyságú háromszögre daraboltok! Keressetek négy eltérő megoldást! Rajzoljátok be rajtuk a daraboló egyenest is és írjátok a háromszögek oldalaira azok hosszait, vagy indokoljátok más módon a háromszögek azonos nagyságát! (Két megoldás eltérő, ha az egyik megoldás sokszöge nem vihető át egy másik megoldás sokszögébe kicsinyítéssel vagy nagyítással.) Vigyázat, hibás sokszögért pontlevonás jár!

Megoldás: Alább négy megfelelő sokszög látható a daraboló egyenesükkel együtt. Az első két esteben az oldalhosszak 1, 2, és egy 1×2-es téglalap átlója. A két utolsó egyarán egyenlőszárú háromszögekre lett darabolva; a harmadiknál az alap 1 a szárak 2 hosszúak; az utolsónál az alap 2 a szárak 1×1-es négyzet átlója.



Eltérő helyes ábráért *2-2 pont*, azok helyes darabolásáért újabb *2-2 pont* jár.
Minden hibás ábráért *4 pont* levonás jár, de *0 pont* a legkevesebb, amit kaphat egy csapat.
Legfeljebb négy helyes megoldás értékelhető.

4. feladat (*3 pont*):
Az itt látható kocka mindegyik lapjára egy-egy számot írtunk. Tudjuk, hogy a szemközti lapokon levő számok összege ugyanannyi. Az a három szám, amit nem látunk, prímszámok. A három nem látható szám közül mennyi a legnagyobb?



Megoldás: A 18 és 14 számokkal szemközti lapokon nem lehet páros prímszám, csak páratlan (*1 pont*), emiatt a 35-tel szemben páros szám van, amely csak 2 lehet. Így a közös összeg $35+2=37$ (*1 pont*), a 18-cal szemben 19, a 14-gyel szemben van a nagyobb, a 23. (*1 pont*).