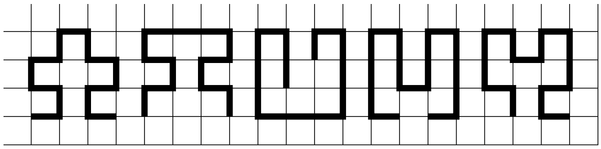
Országos döntő – írásbeli forduló

3. osztály

1. Az alábbi cérnák közül melyiket választhatta Cirmi, ha tudjuk, hogy nem a leghosszabbat választotta?



(A) **(B)** **(C)** **(D)** **(E)**

Megoldás: Számoljuk meg hány darab kis négyzet oldalhosszból állnak az egyes cérnaszálak.
Az (A)-nál lévő 13, a (B)-nél 13, a (C)-nél 14, a (D)-nél 15 és az (E)-nél 14. Így Cirmi csak a (D)-t nem választhatta.

Helyes válasz(ok): A, B, C, E

2. Zsuzsinak egy 99-nél nagyobb, de 1000-nél kisebb természetes számot kellett megtalálnia. Tudta, hogy az első és az utolsó számjegy összege 1, és az első és a második számjegy szorzata 4. Akkor ez a szám:

(A) *nagyobb 121-nél* **(B)** *kisebb 123-nál* **(C)** *nagyobb 138-nál*
(D) *kisebb 156-nál* **(E)** *nagyobb 160-nál*

Megoldás: Két számjegy összege csak akkor lehet 1, ha az egyik a 0, és a másik az 1. Mivel háromjegyű szám 0-val nem kezdődhet, ezért a százasok helyén van az 1 és az egyesek helyén a 0. Az első számjegy, vagyis az 1 és a második számjegy szorzata csak akkor lehet 4, ha a tízesek helyén 4 áll. Vagyis a keresett szám a 140.

Helyes válasz(ok): A, C, D

3. Kedden 23 gyermek bújócskázott. Egyikük volt a hunyó, a többiek bújtak. Kis időn belül 15-öt megtalált közülük. Összesen hány gyereket kellett még megkeresnie?

(A) *5-öt* **(B)** *6-ot* **(C)** *7-et* **(D)** *8-at* **(E)** *9-et*

Megoldás: A 23 gyerekből 22-en bújtak. A 22 közül 15-öt már megtalált, így 22 – 15 = 7-et kell még megkeresnie.

Helyes válasz(ok): C

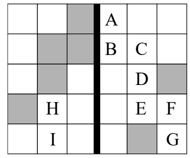
4. Laci két és fél órával ezelőtt ébredt. Négy és fél óra múlva indul haza az iskolából. Pontosan hány órával az ébredése után indul haza Laci az iskolából?

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *6* **(D)** *7* **(E)** *8*

Megoldás: A két fél óra 1 órát tesz ki, így 6 + 1 = 7 órával az ébredése után indul haza az iskolából.

Helyes válasz(ok): D

5. Az ábrán látható lapot félbehajtjuk a vastag vonal mentén. Félbehajtás után melyik betűvel jelölt négyzettel szemben nem lesz szürke négyzet?



(A) *C* **(B)** *D* **(C)** *F* **(D)** *G* **(E)** *H*

Megoldás: Ellenőrizhetjük, hogy a válaszlehetőségek közül C-t, D-t, F-et szürke négyzet fog letakarni, ellenben a G és a H betűt nem szürke négyzet takarja le.

Helyes válasz(ok): D, E

6. Nagyi 11 szelet süteményt sütött. 5 szeletre szórt mazsolát és 7 szeletre mogyorót. Az alábbiakból hány szeletre kerülhetett mazsola és mogyoró is?

(A) *1* **(B)** *3* **(C)** *5* **(D)** *7* **(E)** *9*

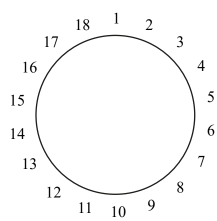
Megoldás: 5-nél több nem lehetett, mivel mazsolát csak 5 szeletre szórt, így (D) és (E) nem jó válasz.
Előfordulhatott, hogy 5-re szórt mindkettőből, 2-re csak mogyorót és 4-re egyikből sem szórt.
Az is megeshetett, hogy 3-ra szórt mindkettőből, 2-re csak mazsolát, 4-re csak mogyorót és 2-re egyikből sem.
Megtörténhetett az is, hogy 1-re szórt mindkettőből, 4-re csak mazsolát és 6-ra csak mogyorót és olyan nem volt, amire egyik feléből sem szórt volna.

Helyes válasz(ok): A, B, C

7. Egy körhintán a szomszédos üléseket, amelyek egyenlő távolságra helyezkednek el egymástól, 1-től kezdődően egyesével megszámozták. Andi a 13-as ülésen ül, Enikő pedig éppen a körhinta túloldalán, Anditól a legtávolabb, a 4-es ülésen. Hány ülés van ezen a körhintán összesen?

(A) *14* **(B)** *16* **(C)** *18* **(D)** *20* **(E)** *22*

Megoldás: Ha a 4-es üléstől elmegyünk a 13-as ülésig abban az irányban, amerre az ülések sorszáma növekszik, akkor az, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 sorszámúak, vagyis 8 ülés mellett haladunk el. Mivel a 4-es és 13-as egymással szemben vannak, ezért a másik irányban is 8 ülés van köztük, vagyis e két ülésen kívül 8 + 8 = 16 ülés van, így velük együtt összesen 16 + 2 = 18 ülés van ezen a körhintán.



Helyes válasz(ok): C

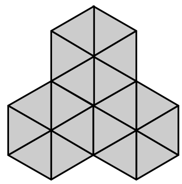
8. Julinak kétszer annyi fiú osztálytársa van, mint lány. Az alábbiakból melyik lehet Juli osztályának létszáma?

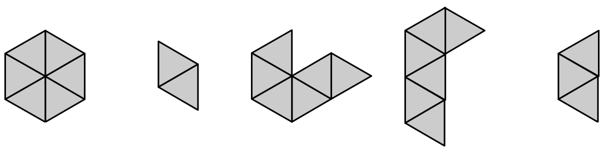
(A) *21* **(B)** *22* **(C)** *24* **(D)** *25* **(E)** *28*

Megoldás: Ha Julinak kétszer annyi fiú osztálytársa van, mint lány, akkor az osztálytársak fel tudnak állni hármas oszlopba úgy, hogy egymás mellett két fiú és egy lány áll. Ez azt jelenti, hogy olyan az osztálytársak száma, hogy az a szám 3 többszöröse. Így maga az osztály Julival együtt három többszörösénél 1-gyel nagyobb.
Mivel $21=7\cdot 3$, $22=7\cdot 3+1$, $24=8\cdot 3$, $25=8\cdot 3+1$, $28=9\cdot 3+1$, ezért az osztály létszáma lehetett 22, 25 és 28 is.

Helyes válasz(ok): B, D, E

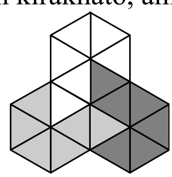
9. Andris a jobb oldali ábrán látható mintát csupa egyforma darabokból rakta ki átfedés nélkül. Melyikkel egyező alakúak lehettek ezek az egyforma darabok az alábbiak közül?





(A) **(B)** **(C)** **(D)** **(E)**

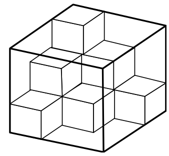
Megoldás: Azonnal felismerhető, hogy 3 darab A-nál lévőből Andris kirakhatta az adott mintát. Mivel az A-nál lévő kirakható 3 darab B-nél lévőből, ezért az 9 darab B-nél lévőből is kirakható. Mivel az A-nál lévő alakzat kirakható 2 darab E-nél lévőből is, ezért az adott minta 6 darab E-nél lévőből is kirakható. A C-nél lévővel szintén kirakható, amint azt alább láthatjuk.



A D-nél lévő elem 6 háromszöget tartalmaz, így abból 3 darabot kéne letenni, viszont bárhogy tesszük le, a középső 6 háromszögből mindegyik legalább 3-at fog fedni, így ezzel nem fedhető le.

Helyes válasz(ok): A, B, C, E

10. Dani építőkészlete 10 *cm* oldalélű kockákból áll. Néhányat berakott a kocka alakú üres akváriumába az ábrán látható módon. Az alábbiakból hány kocka férhet még ebbe az akváriumba, ha az akvárium élei 30 *cm* hosszúak? Dani az eddigi kockákat úgy rakta be, hogy minden kocka az akvárium alján vagy egy másik kockán áll.

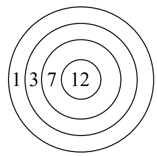


(A) *9* **(B)** *13* **(C)** *17* **(D)** *22* **(E)** *27*

Megoldás: Az üres akvárium alján egy sorba 3 kocka tehető, és egymás mellé összesen három ilyen sor, tehát egy rétegben $3 \cdot 3 = 9$ kocka helyezhető el. Összesen három réteg fér az akváriumba, vagyis $3 \cdot 9 = 27$ kocka. Dani az alsó rétegbe legfeljebb $1 + 2 + 3 = 6$, a második rétegbe $1 + 2 = 3$, és a felsőbe 1 kockát tett bele, tehát eddig összesen 10 kocka van benne. Így még legfeljebb $27 - 10 = 17$ kocka tehető bele, és így biztosan betehető 13 vagy 9 is.
Ha a Dani által betett kockák kissé egymás alá tolva úgy vannak belerakva, hogy a második és felső rétegben látható kockák alatt üreg van, akkor is biztosan van legalább $3 + 2 + 1 = 6$ kocka az akváriumban, Ezért $27 - 6 = 21$-nél több kocka biztosan nem fér még belé. Így (D) és (E) nem jó válasz.

Helyes válasz(ok): A, B, C

11. Atilla az ábrán látható céltáblára lőtt ki 3 nyílvesszőt. Mindegyik lövése eltalálta a táblát. Mennyi lehetett az összpontszáma az alábbiak közül?

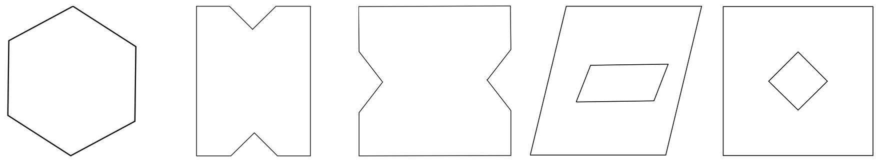


(A) *21* **(B)** *22* **(C)** *23* **(D)** *24* **(E)** *25*

Megoldás: Számoljuk ki az összes lehetőséget!
Ha három azonos pontot ért el, akkor 1 + 1 + 1 = 3, 3 + 3 + 3 = 9,
7 + 7 + 7 = **21**, 12 + 12 + 12 = 36 pontja lett.
Ezek között ott van az (A) válaszlehetőség.
Ha két azonos pontot ért el, akkor az összpontszám az alábbiak valamelyike lehetett:
1 + 1 + 3= 5, 1 + 1 + 7 = 9, 1 + 1 + 12 = 14;
3 + 3 + 1 = 7, 3 + 3 + 7 = 13, 3 + 3 + 12 = 18;
7 + 7 + 1 = 15, 7 + 7 + 3 = 17, 7 + 7 + 12 = 26;
12 + 12 + 1 = **25**, 12 + 12 + 3 = 27, 12 + 12 + 7 = 31.
Ezek között ott találjuk az (E) válaszlehetőséget.
Ha mindhárom pont különböző, akkor az összpontszáma
1 + 3 + 7 = 11, 1 + 3 + 12 = 16, 1 + 7 + 12 = 20, 3 + 7 + 12 = **22** lehetett, amelyek között rátalálunk a (B) válaszlehetőségre.
Mivel más lehetőség nincs, így Atillának az összpontszáma 23 vagy 24 nem lehetett.

Helyes válasz(ok): A, B, E

12. Egy négyzet alakú papírlapot egymás után kétszer félbehajtottunk úgy, hogy a második összehajtás után ismét négyzetet kaptunk. Az így kapott négyzet egyik sarkát egy egyenes vágással levágtuk, majd a lapot kihajtogattuk. Az alábbi ábrák közül melyiket kaphatjuk meg ilyen módon?



(A) **(B)** **(C)** **(D)** **(E)**

Megoldás: Ha visszahajtjuk, és meghosszabbítjuk az eredetiből megmaradt határoló vonalakat akkor is négyzet alakú kell legyen a „kerete". Ezért (B) és (D) nem jó válasz. Egy papírlappal kipróbálható, hogy ha behajtás után másmás sarkát vágjuk le, akkor a többi három alakzatot megkaphatjuk visszahajtás után.

Helyes válasz(ok): A, C, E

13. Mekk Elek néhányat a fából készült gerendáiból 3 részre darabolt és így összesen 33 darab gerendája lett (némelyek változatlan hosszúak maradtak, a többiből rövidebb gerendák keletkeztek). Összesen hány gerendája lehetett kezdetben az alábbiak közül?

(A) *21* **(B)** *22* **(C)** *23* **(D)** *24* **(E)** *25*

Megoldás: Minden 3 részre darabolt gerenda esetén 2–vel nőtt a fadarabjainak száma. Így 21 gerenda közül, ha 6-ot darabolt fel, akkor $21 + 6 \cdot 2 = 21 + 12 = 33$ darabja lett, így (A) jó válasz.
22 nem lehetett, mert ha ezekből hatot vagy többet darabolt fel, akkor 34, vagy még ennél is több darabja lett, ami sok, ha pedig ötöt vagy kevesebbet, akkor 32 darabja lehetett a legtöbb, ami kevés.
23 gerendája szintén lehetett, hiszen, ha ezekből ötöt darabolt fel, akkor a végén $23 + 5 \cdot 2 = 23 + 10 = 33$ darabja lett.
24 nem lehetett, mert ha ezekből ötöt vagy többet darabolt fel, akkor 34, vagy még ennél is több darabja lett, ami sok, ha pedig négyet vagy kevesebbet, akkor 32 darabja lehetett a legtöbb, ami kevés.
25 gerendája is lehetett, hiszen, ha ezekből négyet darabolt fel, akkor a végén $25 + 4 \cdot 2 = 25 + 8 = 33$ darabja lett.

Helyes válasz(ok): A, C, E

4. osztály

1. Karcsi zsebében 7 pénzérme van, melyek közül néhány 5 forintos, a többi 10 forintos. Az alábbiakból összesen hány forint lehet Karcsi zsebében?

(A) *30* **(B)** *40* **(C)** *50* **(D)** *65* **(E)** *75*

Megoldás: Legkevesebb akkor volna a zsebében, ha mind a 7 érme 5 forintos, ekkor $7 \cdot 5 = 35$ forintja van. Mivel ennél kevesebb nem lehet, ezért (A) nem jó válasz.
Ha 6 darab 5 forintosa és 1 darab 10 forintosa van, akkor $6 \cdot 5 + 1 \cdot 10 = = 30 + 10 = 40$ forintja van, így (B) jó válasz.
Ha 4 darab 5 forintosa és 3 darab 10 forintosa van, akkor $4 \cdot 5 + 3 \cdot 10 = = 20 + 30 = 50$ forintja van, így (C) is jó válasz.
Ha 1 darab 5 forintosa és 6 darab 10 forintosa van, akkor $1 \cdot 5 + 6 \cdot 10 = = 5 + 60 = 65$ forintja van, ezért (D) szintén jó válasz.
Legtöbb forintja akkor lehetne, ha mind a 7 érme 10 forintos volna, vagyis $7 \cdot 10 = 70$ forintnál több nem lehet. Tehát (E) nem jó válasz.

Helyes válasz(ok): B, C, D

2. Peti az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokat olyan sorrendben írta fel, hogy bármelyik két közvetlenül egymás után írt szám közti különbség vagy 2 lett, vagy az egyik kétszerese lett a másiknak. Az alábbiakból melyik kerülhetett így a sorban negyedik helyre?

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *8* **(E)** *10*

Megoldás: Módszeres próbálkozással az alábbi tíz eltérő lehetőséget kapjuk.
9, 7, 5, 3, 1, 2, 4, 6, 8, 10; 9, 7, 5, 10, 8, 6, 4, 2, 1, 3;
9, 7, 5, 10, 8, 4, 2, 1, 3, 6;
9, 7, 5, 10, 8, 4, 6, 3, 1, 2; 9, 7, 5, 10, 8, 6, 3, 1, 2, 4,
vagy ezek fordítottja
10, 8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 9; 3, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 5, 7, 9;
6, 3, 1, 2, 4, 8, 10, 5, 7, 9;
2, 1, 3, 6, 4, 8, 10, 5, 7, 9; 4, 2, 1, 3, 6, 8, 10, 5, 7, 9

Helyes válasz(ok): A, B, C, E

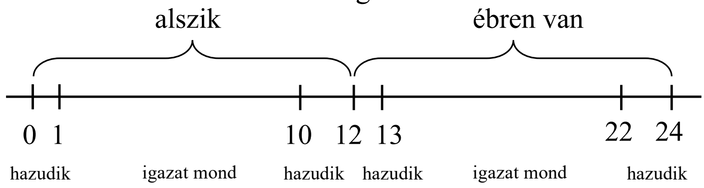
3. Lali lajhár éjféltől délig a fa ágán alszik, déltől éjfélig pedig ébren van, és tanácsokat ad az erdő lakóinak. Az itt látható táblát rakta ki a fa egyik ágára.

EGY ÓRÁVAL EZELŐTT UGYANAZT CSINÁLTAM, MINT AMIT KÉT ÓRA MÚLVA FOGOK CSINÁLNI.

Összesen hány órán keresztül mond igazat a felirat egy teljes napon?

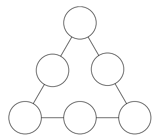
(A) *3* **(B)** *6* **(C)** *12* **(D)** *18* **(E)** *21*

Megoldás: Lali felébredése vagy elalvása előtt 2 óráig, és utána 1 óráig nem mond igazat a felirat, különben igazat mond. Tehát egy nap 24 órájából 6 órán keresztül hazudik és 18 órán keresztül igazat mond a felirat.



Helyes válasz(ok): D

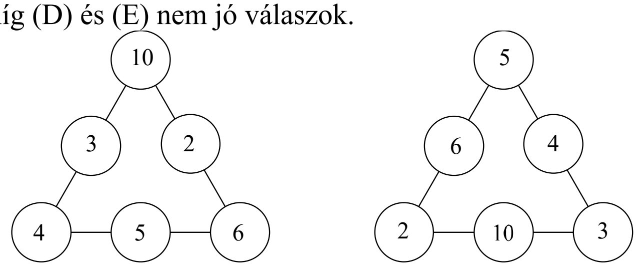
4. Az itt látható ábra köreinek mindegyikébe írjatok más számot a 2, 3, 4, 5, 6, 10 közül úgy, hogy a háromszög mindhárom oldalán ugyanannyi legyen a számok szorzata! Ha ez lehetséges, mennyi lehet ez a szorzat?



(A) 60 **(B)** 90 **(C)** 120 **(D)** 150

(E) *Nem lehet így számokat beírni.*

Megoldás: A háromszög mindhárom oldalán levő számok szorzata osztható 3-mal és 5-tel is. A számok között a 3 és 6 osztható 3-mal, az 5 és a 10 osztható 5-tel. Ezek közül egyik a háromszög csúcsán, a másik a szemközti oldal közepén kell legyen. Így a 4 és a 2 közül is az egyik a háromszög csúcsában, a másik a szemközti oldal közepén van.
A háromszög egy oldalán levő számok szorzata akkor a legnagyobb, ha a lehető legnagyobb számok vannak a csúcsokban, és akkor a legkisebb, ha a lehető legkisebb számok vannak a csúcsokban.
Ezek az elhelyezések valóban lehetségesek, amint az itt látható.
A bal oldali háromszög esetén a lehető legnagyobb az egy oldalon álló számok szorzata, mégpedig 120. A jobb oldali háromszög esetén a lehető legkisebb az egy oldalon álló számok szorzata, mégpedig 60. Ez alapján (A) és (C) jó válasz, míg (D) és (E) nem jó válaszok.



(B) szintén nem lehet jó válasz, hiszen a 90 szorzatként csak akkor keletkezhetne, ha minhárom oldal mentén két darab hármas tényező volna. Az adott számok között viszont csak kettő olyan található, amelyek tartalmaznak 3-as tényezőt, így legfeljebb egy oldal mentén lehet a szorzat 9-nek többszöröse.

Helyes válasz(ok): A, C

5. Mekk Elek néhányat a fából készült gerendáiból 5 részre darabolt és így összesen 33 darab gerendája lett (némelyek változatlan hosszúak maradtak, a többiből rövidebb gerendák keletkeztek). Összesen hány gerendája lehetett kezdetben az alábbiak közül?

(A) *21* **(B)** *22* **(C)** *23* **(D)** *24* **(E)** *25*

Megoldás: Minden 5 részre darabolt gerenda esetén 4–gyel nőtt a fadarabjainak száma. Így 21 gerenda közül, ha 3-at darabolt fel, akkor $21 + 3 \cdot 4 = 21 + 12 = 33$ darabja lett, így (A) jó válasz.
22, 23, vagy 24 nem lehetett, mert ha ezekből hármat vagy többet darabolt fel, akkor 34, 35 vagy 36 darabja lett, vagy még ennél is több, ami sok, ha pedig kettőt vagy kevesebbet, akkor 30, 31 vagy 32 darabja lehetett a legtöbb, ami kevés.
Ha 25 gerenda közül kettőt darabolt fel, akkor 25 + 8 = 33 darabja lett. Így (E) is jó válasz.

Helyes válasz(ok): A, E

6. Az alábbiakból hány olyan pozitív egész szám adható meg, amelyek összege ugyanannyi, mint a szorzatuk?

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*

Megoldás: Mindegyik válaszlehetőségre mutatunk egy-egy példát:
két számra 2; 2 jó, mert: $2 + 2 = 2 \cdot 2$;
három számra 1; 2; 3 jó, mert $1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$;
négy számra 1; 1; 2; 4 jó, mert $1 + 1 + 2 + 4 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4$;
öt számra 1; 1; 1; 3; 3 jó, mert $1 + 1 + 1 + 3 + 3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3$;
hat számra 1; 1; 1; 1; 2; 6 jó, mert $1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 6 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4$.

Helyes válasz(ok): A, B, C, D, E

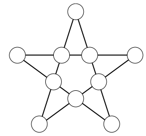
7. A $S + U + M + M + A = 11$ egyenlőségben egyforma betűk egyforma és különböző betűk különböző, nullától eltérő számjegyeket jelölnek. Hányast jelölhet így az M betű?

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *5*

Megoldás: Négyféle betű szerepel az egyenlőségben, így a legkisebb, amit jelölhetnek az 1, 2, 3, 4. Egyedül az M szerepel kétszer. Ha $M = 1$, és a többi a 2, 3, 4 közül kerül ki, akkor 1 + 1 + 2 + 3 + 4 éppen 11. Ha M több 1-nél, akkor már csak 11-nél nagyobb eredmény keletkezhet, ezért ez már nem fordulhat elő. Így M egyedüli lehetséges értéke az 1.

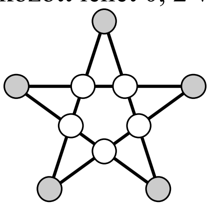
Helyes válasz(ok): A

8. Az ötágú csillagon lévő körök mindegyikébe más számot írunk az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számok közül. A csillag öt oldalegyenese közül összesen hány olyan lehet, amelyen a négy szám összege páratlan?

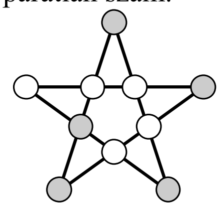


(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *5*

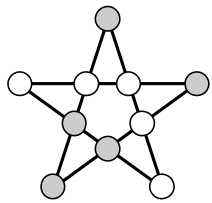
Megoldás: Számoljuk ki mind az 5 oldalegyenesen a négy szám összegét, majd adjuk össze ezt az 5 számot, ekkor a körökben lévő 10 szám összegének a kétszeresét kapjuk, azaz páros számot. Tehát az 5 szám (az 5 oldalösszeg) összege páros, így az összeadandók között páros sok páratlan szám lehet. Az oldalösszegek között nem lehet a páratlan számok száma 1, 3 vagy 5. Az összegek között lehetne 0, 2 vagy 4 páratlan szám. Nézzük meg, hogy megvalósulhatnak-e ezek!
Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számok között 5 páros és 5 páratlan szám van. Ha az itt alább látható ábrákon a befestett körökbe tegyünk páratlan számokat, a fehér körökbe pedig páros számokat. Az ábrák mutatják, hogy így az összegek között lehet 0, 2 vagy 4 páratlan szám.



0 összeg páratlan



2 összeg páratlan



4 összeg páratlan

Helyes válasz(ok): B, D

9. Gilgámes 6 aranyrögöt úgy szeretne elosztani két fia között, hogy mindkét fiú ugyanakkora súlyú aranyat kapjon. Az aranyrögök tömege rendre 2 kg, 3 kg, 5 kg, 8 kg, 13 kg, 20 kg. Bárhogyan is próbálkozott, nem tudta egyenlően szétosztani. Ezért hozatott még egy rögöt a kincstárból, és a hét aranyrögöt már sikerült egyenlően szétosztania. Az alábbiakból hány kg lehetett az utólag hozatott aranyrög tömege?

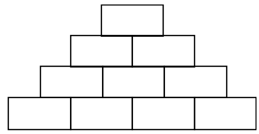
(A) *11* **(B)** *12* **(C)** *13* **(D)** *14* **(E)** *15*

Megoldás: Ha a rögök két egyenlő tömegű csoportba oszthatók, akkor a rögök össztömege páros szám. Emiatt a hetedik rög tömege csak páratlan szám lehetett, vagyis 11, 13 vagy 15 kg. Vizsgáljuk meg egyenként, hogy megvalósítható-e a szétosztás ezekben az esetekben!
Ha a hetedik rög 11 kg-os, akkor az össztömeg $2+3+5+8+13+20+11=62kg$, és van alkalmas szétosztás:
$20+11=2+3+5+8+13=31$
Ha a hetedik rög 13 kg-os, akkor az össztömeg 64 kg, ám a 2, 3, 5, 8, 13, 20, 13 számokból nem tudunk néhányat választani úgy, hogy összegük 32 legyen (a 64 fele 32).
Ha a hetedik rög 15 kg-os, akkor az össztömeg 66 kg, ennek a fele 33 kg. Van

alkalmas szétosztás:
$20 + 13 = 2 + 3 + 5 + 8 + 15 = 33$

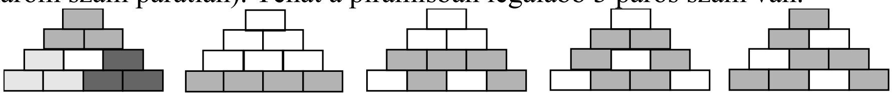
Helyes válasz(ok): A, E

10. Anna az ábrán látható piramis tégláit szeretné kitölteni egész számokkal úgy, hogy minden szám az alatta lévő két szám összege legyen (kivétel az alsó sor). Összesen hány páros számot írhatott Anna így a piramisba a helyes kitöltés során?



(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *9*

Megoldás: Az első ábrán megjelölt 3 db, 3 téglából álló rész mindegyikében kell lennie páros számnak (hiszen egy ilyen minipiramisban nem lehet mindhárom szám páratlan). Tehát a piramisban legalább 3 páros szám van.



4 páratlan (szürke mezők) 5 páratlan 6 páratlan 7 Páratlan

Ha egy sorban van páratlan szám, akkor az alatta lévő sorban is van páratlan szám. A fölötte lévő sorban csak akkor nincs páratlan szám, ha a vizsgált sor, amelyben van páratlan szám, az a sor csak páratlan számokból áll. Ezért, ha a piramisban van páratlan szám, akkor legalább 4 páratlan szám van. Ezek alapján a páratlan számok száma 0, 4, 5, 6 vagy 7. Az ábrák mutatják, hogy ezek az esetek megvalósulnak. Így a páros számok száma 3, 4, 5, 6 vagy 10 lehet.

Helyes válasz(ok): B, C, D

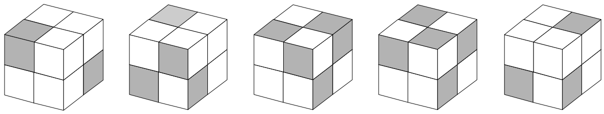
11. Egy zacskóban csak tej- és étcsokis drazsék vannak. Ebben bármelyik 8 drazsé közül legalább egy mindig tejcsokis és bármelyik 7 drazsé közül legalább egy mindig étcsokis. Hány drazsé lehet ebben a zacskóban?

(A) *12* **(B)** *13* **(C)** *14* **(D)** *15* **(E)** *16*

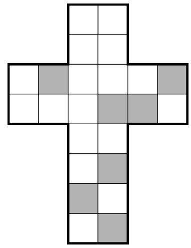
Megoldás: Mivel 8 közül legalább 1 tejcsokis, így legfeljebb 7 lehet étcsokis. 7 közül viszont legalább 1 mindig étcsokis, ezért 6-nál több nem lehet a tejcsokis drazsék száma. Így a drazsék száma legtöbb 7 + 6 = 13 lehet. Tehát (C), (D) és (E) nem jó válasz.
12 drazsé közül lehet 5 tej és 7 étcsokis, ekkor is bármely 8 közül legalább egy tejcsokis kell legyen és bármely 7 közül biztosan van legalább 1 (sőt több is) étcsokis. Így (A) is jó válasz.

Helyes válasz(ok): A, B

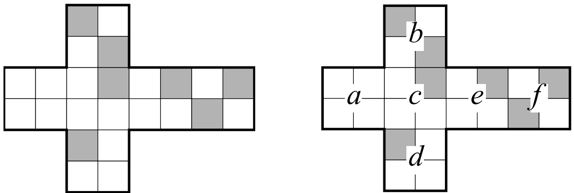
12. A jobbra látható kockapalástot kockává hajtogattam. Melyik válaszlehetőségnél lévő kockát kaphattam?

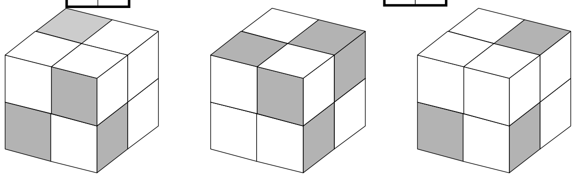


(A) **(B)** **(C)** **(D)** **(E)**

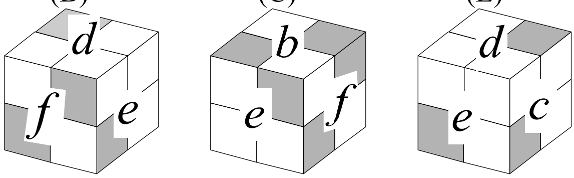


Megoldás: A (B), (C), (E) kockákat megkaphatjuk a hajtogatással. Jelöljük a palást négyzeteit az ábra szerint.





(B) (C) (E)

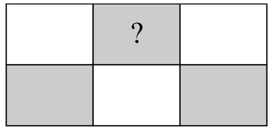


(B) (C) (E)

Az (A) kocka nem kapható meg, mert annak a három látható lapja csak a *c, d, e* lehet, ám a kocka élén nem illeszkedhet egymáshoz két szürke négyzet úgy, ahogy azt a kockán látjuk.
A (D) kocka felső és a jobb oldali lapja csak *b* és *f* lehet, ám azon az élen, amelyre közösen illeszkednek, két szürke négyzetnek kellene, hogy egy közös oldala legyen, ami itt nincs.

Helyes válasz(ok): B, C, E

13. Marci az itt látható mezők mindegyikébe más számot írt be az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok közül úgy, hogy mindkét sorban ugyanannyi lett a számok összege, ha a szürke mezőkbe kerülő számok értékét duplán számolta. Melyik szám kerülhetett így a kérdőjel helyére?



(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*

Megoldás: Legyenek a szürke mezőkbe kerülő számok *a, b* és *c*. Ha össze-

adom a beírt számokat, akkor a kapott összeg páros: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + a + b + c = 21 + a + b + c$ páros, tehát az $a + b + c$ összeg páratlan kell legyen. Így a szürke mezőkbe vagy 3 páratlan számot vagy 1 páratlan és 2 páros számot írt Marci.
$21 + a + b + c$ értéke legalább $21 + 1 + 2 + 4 = 28$, és legfeljebb $21 + 4 + 5 + 6 = 36$, ezért a sorösszegek értéke legalább 14, legfeljebb pedig 18.
Ha a kérdőjel helyére 1-et írt, annak 2 lesz a számításnál figyelembe vett értéke, és abban a sorban a számok összege így legfeljebb $2 + 5 + 6 = 13$. Ez kisebb 14-nél, így ekkor nincs alkalmas kitöltés.
Alább látható, hogy a kérdőjel helyén állhat 2, 4, 5 vagy 6.

5	2	6
3	1	4

összeg: 15

3	4	5
1	2	6

összeg: 16

3	5	4
2	1	6

összeg: 17

1	6	4
5	3	2

összeg: 17

Vizsgáljuk meg, hogy 3 állhat-e a kérdőjel helyén!
Ha ott 3 volna, akkor a korábbiak miatt a másik két szürke szám vagy két páratlan, vagy két páros. Ezért a következő kitöltési lehetőségek vannak.

	3	
1		5

beírandó még: 2, 4, 6

	3	
2		4

beírandó még: 1, 5, 6

	3	
2		6

beírandó még: 1, 4, 5

	3	
4		6

beírandó még: 1, 2, 5

Figyelembe véve a még beírható számokat, ezek egyike sem fejezhető be.
Tehát a kérdőjel helyén állhat 2, 4, 5, 6, és nem állhat 1 vagy 3.

Helyes válasz(ok): A, C, D, E

5. osztály

1. Egy galambdúcban 12 galamb pihen: 4 fehér, 3 szürke, 5 barna színű. Ha közülük 4 kirepül, a dúcban maradtakra az alábbi állítások közül melyik igaz biztosan?

(A) *Egyik sem fehér.* **(B)** *Van köztük kétféle színű.*

(C) *Mind fehér.* **(D)** *Van köztük barna.*

(E) *Mindhárom színűből maradt.*

Megoldás: Az (A) „Egyik sem fehér” állítás lehet hamis, ha például 4 barna galamb repül ki a dúcból. A (C) „Mind fehér” állítás biztosan hamis, hiszen 8 galamb marad a dúcban. Az (E) „Mindhárom színűből maradt” állítás lehet hamis, ha kirepül a 4 fehér, vagy kirepül a 3 szürke galamb.
Biztosan igaz a (B) „Van köztük kétféle színű” állítás, mert úgy lenne hamis, ha egyféle szín marad. Ehhez a háromból kétféle színből minden madárnak el kell repülnie, és ez legalább 4 + 3 = 7 kirepülő galamb.
Ugyancsak igaz a (D) „Van köztük barna” állítás, mert nem repülhet el mind az 5 barna galamb.

Helyes válasz(ok): B, D

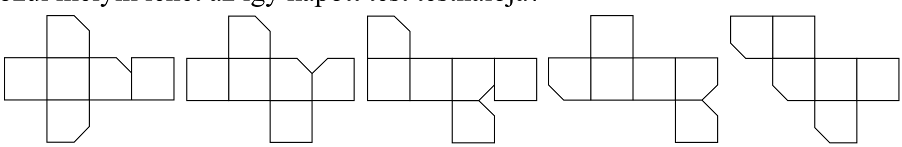
2. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számokat négy csoportba osztottam úgy, hogy egymás után írva ezeket a csoportokat, mindegyik csoportban kétszer annyi a számok összege, mint az előző csoportban (kivéve az első csoportot), és a csoportokban rendre 1, 1, 3, 4 szám van. Melyik szám kerülhet a 4-essel ugyanabba a csoportba?

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *8* **(E)** *9*

Megoldás: A számok összege 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45, a csoportokban a számok összegét jelölje x, $2x$, $4x$ és $8x$. Mivel $x + 2x + 4x + 8x =$ $= 45$, azaz $15x = 45$, így $x = 3$. Ez alapján a lehetséges csoportok:
(3), (6), (9, 1, 2), (4, 5, 7, 8) vagy (3), (6), (7, 4, 1), (2, 5, 8, 9).

Helyes válasz(ok): A, D

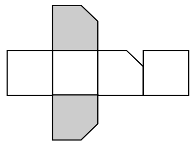
3. Egy kockának egy egyenes vágással levágtuk az egyik csúcsát. Az alábbiak közül melyik lehet az így kapott test testhálója?



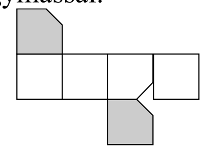
(A) **(B)** **(C)** **(D)** **(E)**

Megoldás: Ahol a kocka csúcsát levágtuk, az ott találkozó 3 lap fog megcsonkulni, vagyis a hálón lévő 3 csonkított négyzet visszahajtva egy pontban kell találkozzon.

Az (A) és (C) nem jó válasz, mert például az alább szürkével jelölt 2 csonka négyzet visszahajtva nem is érintkezik egymással.



(A)



(C)

A többi három viszont pontosan úgy hajtogatható kockává, hogy a csonkított négyzeteknek éppen a csonka sarkai illeszkednek egymáshoz.

Helyes válasz(ok): B, D, E

4. Az itt látható összeadásban az azonos betűk azonos számjegyet, a különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek. Melyik számjegyet jelölheti a C betű?

$$\begin{array}{r} \mathbf{ABCDE} \\ \mathbf{BCDE} \\ \mathbf{CDE} \\ \mathbf{DE} \\ +\quad \mathbf{E} \\ \hline \mathbf{AAAAA} \end{array}$$

(A) *3* **(B)** *5* **(C)** *6* **(D)** *7* **(E)** *8*

Megoldás: Ha E páros volna, akkor az egyesek összege kerek tízes lenne, amiért A értéke 0 kellene legyen, ami nem lehetséges. Így E páratlan és ezáltal A biztosan 5. Ha E 1 volna, akkor az egyesek összeadásakor nem lesz tízesátlépés, de ekkor a tízesek összeadásakor a négy darab D páros eredményt szolgáltatna, ami nem lehet 5.
Ha E 3, akkor az egyesektől átviszünk egy tízest, így a 4D eredménye 4-esre kell végződjön (csak így kaphatunk 5-ös végződést az eredményben). 4D akkor végződik 4-re, ha D értéke 1 vagy 6.

$$\begin{array}{r} \mathbf{5BC13} \\ \mathbf{BC13} \\ \mathbf{C13} \\ \mathbf{13} \\ +\quad \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{55555} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathbf{5BC63} \\ \mathbf{BC63} \\ \mathbf{C63} \\ \mathbf{63} \\ +\quad \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{55555} \end{array}$$

A bal oldali esetnél most 3C végződése 5 kellene legyen, ami csak C = 5 esetén lehetne, de az 5 már foglalt az A-nak, így ez az eset nem lehetséges.
A jobb oldalinál 3C+2-nek kellene 5-re végződnie, ami akkor következne be, ha 3C végződése 3. Ez C = 1 esetén tud csak megvalósulni.

$$\begin{array}{r} \mathbf{5B163} \\ \mathbf{B163} \\ \mathbf{163} \\ \mathbf{63} \\ +\quad \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{55555} \end{array}$$

Innen viszont most nincs tízesátlépés és így 2B eredménye nem tud 5 lenni. Ezzel kiderült, hogy E értéke 3 sem lehet.
E nem lehet 5 sem, mivel megállapítottuk, hogy A értéke 5.
Nézzük lehet-e E értéke 7. Ekkor az egyesektől 3 tízes lép tovább, így 4D végződése 2 kell legyen. Ez akkor lehetséges, ha D értéke 3 vagy 8.

$$\begin{array}{r} 5\ B\,C\,3\,7 \\ B\,C\,3\,7 \\ C\,3\,7 \\ 3\,7 \\ +\quad 7 \\ \hline 5\ 5\ 5\,5\,5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\ B\,C\,8\,7 \\ B\,C\,8\,7 \\ C\,8\,7 \\ 8\,7 \\ +\quad 7 \\ \hline 5\ 5\ 5\,5\,5 \end{array}$$

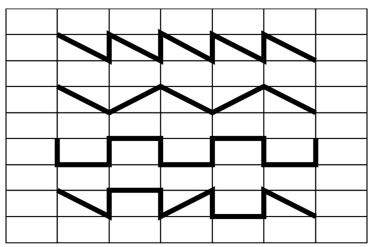
Balra azt találjuk, hogy a tízesektől továbbmegy egy százas, ezért 3C+1 végződése 5, vagyis 3C végződése 4.
Ebből C = 8, de ekkor a százasoktól 2 ezres lép tovább, de 2B+2 nem tud 5-öt adni. Ez tehát nem fordulhat elő.
A jobbra lévő esetnél a tízesektől továbbmegy három százas, ezért 3C+3 végződése 5, vagyis 3C végződése 2, ahonnan C = 4.

$$\begin{array}{r} 5\ B\,C\,8\,7 \\ B\,C\,8\,7 \\ C\,8\,7 \\ 8\,7 \\ +\quad 7 \\ \hline 5\ 5\ 5\,5\,5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\,2\,4\,8\,7 \\ 2\,4\,8\,7 \\ 4\,8\,7 \\ 8\,7 \\ +\quad 7 \\ \hline 5\,5\,5\,5\,5 \end{array}$$

Innen pedig azt kapjuk, hogy B = 2. Ellenőrizve, valóban helyes összeadást kaptunk, így a 4 az helyes válasz, de ez nem szerepel a lehetőségek közt.
Meg kell még vizsgálni, hogy E értéke lehet-e 9. Ekkor az egyesektől 4 tízes megy tovább és 4D + 4 kellene 5-re végződjön, vagyis 4D kellene 1-re végződjön, ami lehetetlen, mivel 4D minden esetben páros szám.
Tehát C egyetlen lehetséges értéke a 4, amelyik egyetlen válaszlehetőségnél sem szerepel.

Helyes válasz(ok): -

5. Négy csiga versenyzett az egyforma téglalap alakú járólapokból kirakott teraszon. Megtett útjukat láthatjátok az ábrán. A legfelső rajz Csupasz útját mutatja, melynek hossza 370 *cm*. Alatta, a második Házas 250 *cm* hosszú útját mutatja, a harmadik pedig Szarvas 380 *cm* hosszú útját. Hány cm hosszú lehet a negyedik, Csíkos útja?



(A) *250* **(B)** *260* **(C)** *300* **(D)** *350* **(E)** *360*

Megoldás: Az útvonalak háromféle szakaszból állnak össze. Ezek a téglalap átlója, szélessége és hosszúsága.
A második, Házas 250 *cm*-es útja öt darab átlóból tevődik össze, így egy átló hossza 250 : 5 = 50 *cm*.
A felső, Csupasz 370 *cm*-es útja öt átlóból és négy szélességből áll, vagyis a négy szélesség együtt 370 – 250 = 120 *cm*, ezért egy szélesség 120 : 4 = 30 *cm*.
A harmadik, Szarvas 380 *cm*-es útja hat szélességből, ami 6·30 = 180 *cm* és öt

hosszúságból tevődik össze. Így az öt hosszúság együtt 380 – 180 = 200 *cm*, ezért egy hosszúság 200 : 5 = 40 *cm*.
Most már kiszámolhatjuk Csíkos útjának hosszát. Ez 3 átlóból, 4 szélességből és 2 hosszúságból áll. Így a hossza:

$$3 \cdot 50 + 4 \cdot 30 + 2 \cdot 40 = 150 + 120 + 80 = 350\ cm\ .$$

Helyes válasz(ok): D

6. Írjátok le azt a csupa különböző jegyből álló legnagyobb számot, amelyben bármely három számjegy összege kisebb 19-nél. Mennyit kaphattok, ha összeadjátok ennek a számnak valamelyik négy számjegyét?

(A) *11* **(B)** *18* **(C)** *21* **(D)** *22* **(E)** *25*

Megoldás: Legfeljebb 18 lehet a keresett számban három számjegy összege. Mivel 18 = 9 + 5 + 4 = 8 + 6 + 4= 7 + 6 + 5, és egy szám annál nagyobb minél több számjegyből áll, ezért így, ha 9 vagy 8-cal kezdődne a szám, akkor az első három számjegy után csak a 3210 következhetne, vagyis 4 darab, ha viszont a szám 7-tel kezdődik, akkor eggyel többjegyű számot tudunk felírni, így ez a 76543210 lesz a feltételeknek eleget tevő legnagyobb szám.
Ebben a legnagyobb négy számjegy összege 7 + 6 + 5 + 4 = 22, ezért (D) jó, (E) pedig nem jó válasz.
Lehet négy számjegy összege ebben 7 + 6 + 5 + 3 = 21 vagy 6 + 5 + 4 + 3 = = 18, vagy 7 + 3 + 1 + 0 = 11 is.

Helyes válasz(ok): A, B, C, D

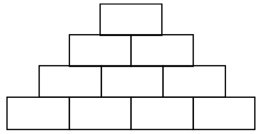
7. Benő a következő játékot játssza. Felír egy számot, majd abból úgy kap újabb számot, hogy a szám utolsó jegyével megszorozza az utolsó jegy elhagyásával kapott számot. Például 1122 esetén $112 \cdot 2 = 224$-et kap. Ezt a lépést ismételgeti, a második lépésben 224-ből $22 \cdot 4 = 88$-at kap, majd 88-ból $8 \cdot 8 = 64$-et, innen $6 \cdot 4 = 24$-et, végül $2 \cdot 4 = 8$-at. Amikor egyjegyű számhoz ér, akkor már nem folytatja tovább. Benő egy háromjegyű páratlan számról indulva, összesen hány lépésben érheti el a nullát?

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *5*

Megoldás: Nullát csak úgy kapunk, ha nullával szorzunk. Egy lépésben nem juthatunk a 0-hoz, mert páratlan számról indulunk, páratlan számjeggyel szorzunk egy kétjegyű számot.
2 lépésben eljuthat a 0-hoz, például így: 103 →30 →0.
3 lépésben is eljuthat a 0-hoz: 157 →105 →50 →0 vagy 135 →65 →30 →0.
4 lépésben is eljuthat a 0-hoz: 275 →135 →65 →30 →0.
5 lépésben is eljuthat a 0-hoz: 235 →115 →55 →25 →10 →0.

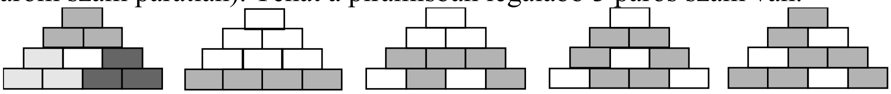
Helyes válasz(ok): B, C, D, E

8. Anna az ábrán látható piramis tégláit szeretné kitölteni egész számokkal úgy, hogy minden szám az alatta lévő két szám összege legyen (kivétel az alsó sor). Összesen hány páros számot írhatott Anna így a piramisba a helyes kitöltés során?



(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *9*

Megoldás: Az első ábrán megjelölt 3 db, 3 téglából álló rész mindegyikében kell lennie páros számnak (hiszen egy ilyen minipiramisban nem lehet mindhárom szám páratlan). Tehát a piramisban legalább 3 páros szám van.



4 páratlan (szürke mezők) 5 páratlan 6 páratlan 7 Páratlan

Ha egy sorban van páratlan szám, akkor az alatta lévő sorban is van páratlan szám. A fölötte lévő sorban csak akkor nincs páratlan szám, ha a vizsgált sor, amelyben van páratlan szám, az a sor csak páratlan számokból áll. Ezért, ha a piramisban van páratlan szám, akkor legalább 4 páratlan szám van. Ezek alapján a páratlan számok száma 0, 4, 5, 6 vagy 7. Az ábrák mutatják, hogy ezek az esetek megvalósulnak. Így a páros számok száma 3, 4, 5, 6 vagy 10 lehet.

Helyes válasz(ok): B, C, D

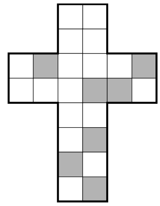
9. Misi az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 számokat két csoportba osztotta, és összeadta mindkét csoportban a számokat. Az alábbiakból mennyi lehet a két összeg különbsége?

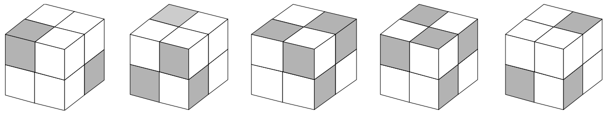
(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *5*

Megoldás: A húsz szám összege 210, azaz páros. Ha az egyik csoportban a számok összege A, a másikban B, akkor $A + B = 210$. Innen látható, hogy vagy A és B is páros, vagy A és B is páratlan, ezért $A - B$ értéke páros.
A különbség lehet 2, ha
$A = 20 + 19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 1 = 106$ és
$B = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 104$
A különbség lehet 4 is, ha
$A = 20 + 19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 2 = 107$ és
$B = 1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 103$

Helyes válasz(ok): B, D

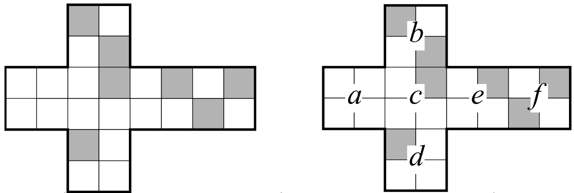
10. A jobbra látható kockapalástot kockává hajtogattam. Melyik válaszlehetőségnél lévő kockát kaphattam?

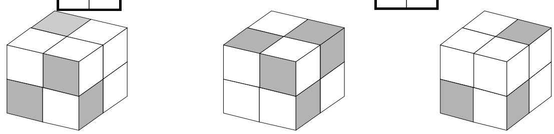




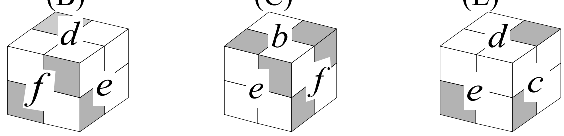
(A) **(B)** **(C)** **(D)** **(E)**

Megoldás: A (B), (C), (E) kockákat megkaphatjuk a hajtogatással. Jelöljük a palást négyzeteit az ábra szerint.





(B) (C) (E)



(B) (C) (E)

Az (A) kocka nem kapható meg, mert annak a három látható lapja csak a *c, d, e* lehet, ám a kocka élén nem illeszkedhet egymáshoz két szürke négyzet úgy, ahogy azt a kockán látjuk.
A (D) kocka felső és a jobb oldali lapja csak *b* és *f* lehet, ám azon az élen, amelyre közösen illeszkednek, két szürke négyzetnek kellene, hogy egy közös oldala legyen, ami itt nincs.

Helyes válasz(ok): B, C, E

11. Egy kör kerületére felírtunk 7 darab 1-est és 6 darab 2-est úgy, hogy nincs egymás mellett három egyforma számjegy. Számoljuk ki minden egymás mellett álló három szám szorzatát és ezeket adjuk össze. Mennyi lehet ez az összeg?

(A) *30* **(B)** *32* **(C)** *36* **(D)** *40* **(E)** *42*

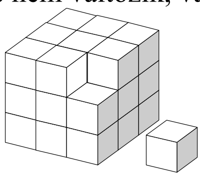
Megoldás: Mivel nincs három darab 1-es egymás mellett, és nincs három darab 2-es egymás mellett, így egy hármasban (három egymás melletti számban) lehet 1 db 1-es és 2 db 2-es, vagy 2 db 1-es és 1 db 2-es. Ezekben a hármasokban a szorzat 4, illetve 2, azaz a szorzat kétszerese a 2-esek számának. Minden 2-es számjegy három szorzatban vesz részt, így a szorzatok összege 6-szorosa a 2-esek számának.

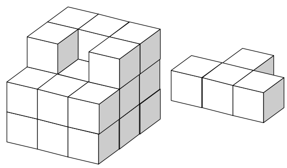
Helyes válasz(ok): C

12. Egységkockákból kiraktunk egy $3\times3\times3$-as nagy kockát. Az alábbiakból hány kis kockát lehet elvenni a nagy kockából úgy, hogy az új test felszíne egyenlő legyen a nagy kocka felszínével? (Elvételkor a test nem eshet szét, az elvetten kívül minden más kocka a helyén marad.)

(A) *4* **(B)** *6* **(C)** *8* **(D)** *10* **(E)** *12*

Megoldás: A nagy kocka felszíne $6\cdot3\cdot3=54$ kis egységnégyzet. Ha a nagy kocka sarkaiból bármelyik kis kockát elvesszük, az eredeti felszínből eltűnik 3 egységnégyzet, de az ott keletkező üres helyen három új egységnégyzet jelenik meg, mégpedig a testből azoknak a kis kockáknak egy-egy lapja, amelyikkel az elvett kocka belső három lapja érintkezett, tehát ilyenkor a keletkező test felszíne nem változik, vagyis most is 54 kis egységnégyzet lesz.





A kockának 8 sarka van, így ezzel a módszerrel 1-től 8-ig akárhány kocka elvételével célt érünk.
A jobbra látható módon is elvehetünk a felső szinten az ott látható módon 4 kis kockát és ugyanezt megtehetjük a szemközti részén a nagy kockának, vagyis az alsó szinten a megfelelő 4 kis kockát, így 8 kocka elvételével még mindig 54 egységnégyzet az új test felszíne, viszont ekkor még elvehetjük a hátsó lap 4 sarkából bármelyik kis kockát, így 8 + 2 = 10, vagy 8 + 4 = 12 kis kocka elvételével még mindig 54 kis egységnégyzet marad a felszín.

Helyes válasz(ok): A, B, C, D, E

13. Az $\overline{abc}$ háromjegyű számra igaz, hogy ha számjegyei összegét összeszorozzuk a számjegyösszegnél 1-gyel nagyobb számmal, akkor megkapjuk ezt az $\overline{abc}$ háromjegyű számot, vagyis $\overline{abc}=(a+b+c)\cdot(a+b+c+1)$. Melyik számjegy szerepelhet egy ilyen $\overline{abc}$ háromjegyű számban?

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*

Megoldás: Ha ellenőrizzük, hogy két szomszédos szám szorzata hányasra végződhet:
$\overline{...0}\cdot\overline{...1}=\overline{...0}$; $\overline{...1}\cdot\overline{...2}=\overline{...2}$; $\overline{...2}\cdot\overline{...3}=\overline{...6}$; $\overline{...3}\cdot\overline{...4}=\overline{...2}$;
$\overline{...4}\cdot\overline{...5}=\overline{...0}$; $\overline{...5}\cdot\overline{...6}=\overline{...0}$; $\overline{...6}\cdot\overline{...7}=\overline{...2}$; $\overline{...7}\cdot\overline{...8}=\overline{...6}$;
$\overline{...8}\cdot\overline{...9}=\overline{...2}$; $\overline{...9}\cdot\overline{...0}=\overline{...0}$.
azt találjuk, hogy csak 0, 2 vagy 6-ra végződhet, így az egyesek helyiértéke, vagyis *c* csakis ezen számjegyek közül kerülhet ki.
Ha *c* értéke 6 volna, akkor a háromjegyű szám jegyeinek összege legfeljebb 9 + 9 + 6, így a szorzat $24\cdot25=600$-nál több nem lehet. Ebből viszont adódik, hogy *a* értéke nem haladhatja meg a 6-ot. Ez alapján a szorzat legfeljebb

$(6+9+6)\cdot(6+9+6+1)=21\cdot 22=462$ lehetne, amiből azt kapjuk, hogy a nem lehet több 4-nél sem. Így viszont a szorzat nem lehet több $(4+9+6)\cdot(4+9+6+1)=9\cdot 20=380$ -nál, azaz a értéke 4 sem lehet, legfeljebb 3. Csakhogy ezért a szorzat most már
$(3+9+6)\cdot(3+9+6+1)=18\cdot 19=342$ -t sem haladhatja meg.

Mindebből megtudtuk, hogy a számjegyösszeg és az annál 1-gyel nagyobb szám szorzata 10 és 20 közötti két szomszédos szám szorzatát jelentheti. Mivel

$10\cdot 11=110\neq(1+1+0)\cdot(1+1+0+1)$;

$11\cdot 12=132\neq(1+3+2)\cdot(1+3+2+1)$;

$12\cdot 13=156=(1+5+6)\cdot(1+5+6+1)$;

$13\cdot 14=182\neq(1+8+2)\cdot(1+8+2+1)$;

$14\cdot 15=210\neq(2+1+0)\cdot(2+1+0+1)$;

$15\cdot 16=240\neq(2+4+0)\cdot(2+4+0+1)$;

$16\cdot 17=272\neq(2+7+2)\cdot(2+7+2+1)$;

$17\cdot 18=306\neq(3+0+6)\cdot(3+0+6+1)$;

$18\cdot 19=342\neq(3+4+2)\cdot(3+4+2+1)$;

az egyedüli jó megoldás a $12\cdot 13=156=(1+5+6)\cdot(1+5+6+1)$.

Helyes válasz(ok): D, E

6. osztály

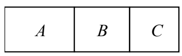
1. Négy különböző természetes szám összege 9. Mennyi lehet a négy szám szorzata?

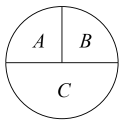
(A) *0* **(B)** *8* **(C)** *9* **(D)** *12* **(E)** *24*

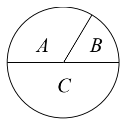
Megoldás: A négy legkisebb különböző pozitív egész összege 1 + 2 + 3 + 4 = 10 > 9, ezért a négy szám között szerepelnie kell a 0-nak. Ezért a szorzatuk 0. (Ilyen négy szám pl.: 0, 2, 3, 4.)

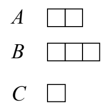
Helyes válasz(ok): A

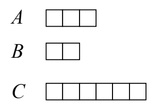
2. Az alábbiakból melyik ábra felel meg a $2A = 3B = C$ összefüggésnek, ha A, B és C a megfelelő síkidom területét jelenti?











(A) **(B)** **(C)** **(D)** **(E)**

Megoldás: Vizsgáljuk meg egyenként a válaszlehetőségeket!
(A) lehetőségnél az A területe a legnagyobb, így annak kétszerese nem lehet egyenlő C területével.
(B) esetén, ha A kétszerese egyenlő C területével, akkor A egy negyed kör és ekkor B is negyed kör. Viszont ekkor B háromszorosa nem lehet egyenlő C területével, tehát ez sem jó válaszlehetőség.
(C) lehetőségnél A területe nagyobb B területénél, így B nagyobb egy negyed körnél, ezért A kétszerese nagyobb egy fél körnél, vagyis nem lehet egyenlő C területével.
(D) lehetőségnél A kétszerese 4 négyzet területével egyenlő, ez nem azonos C területével, ami csak egy négyzet területe.
(E) lehetőségnél A 3 négyzetből áll, így kétszerese 6 négyzetből; B 2 négyzetből áll, így háromszorosa szintén 6 négyzetet ér és 6 négyzetből áll C is. Így ez esetben igaz, hogy $2A = 3B = C$, vagyis ez az egyetlen jó válaszlehetőség.

Helyes válasz(ok): E

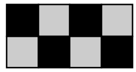
3. Egy egész szám a 13-szorosa az első számjegyének. Melyik lehet ennek a számnak az utolsó számjegye?

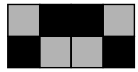
(A) *1* **(B)** *3* **(C)** *6* **(D)** *8* **(E)** *9*

Megoldás: A keresett szám egy egyjegyű szám és a 13 szorzata. Nézzük a lehetséges szorzatokat: 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104, 117. Közülük a 13, 26 és 39 számokra teljesül, hogy a szám a 13-szorosa az első számjegyének.

Helyes válasz(ok): B, C, E

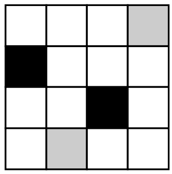
4. Azonos méretű szürke és fekete kockákat helyeztünk egy 4×4-es táblára. Ezt az elhelyezést láthatjuk ábránkon elölről, illetve oldalról nézve. Legkevesebb hány kockát helyezhettünk így el ezen a táblán?


elölről


oldalról

(A) *8* **(B)** *10* **(C)** *12* **(D)** *14* **(E)** *16*

Megoldás: 8 kockát mindkét alkalommal látunk, ezért legalább 8 kockára szükség van az elhelyezéshez.
8 kockával el is érhetőek ezek a nézetek. Alább ennek a 8 kockának a felülnézetét láthatjuk.



Itt a felső kockák színei láthatók, ahol fekete kocka alatt szürke, szürke kocka alatt pedig fekete kocka van.

Helyes válasz(ok): A

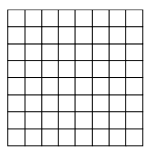
5. Egy asztal körül 13-an ülnek, lovagok, akik mindig igazat mondanak és lókötők, akik mindig hazudnak. Egymás után megszólalnak sorban, ahogyan egymás mellett ülnek és mindegyikük azt mondja, hogy eddig 2-vel több lókötő beszélt, mint lovag. A megszólalás sorrendjében az alábbiak közül hányadik lehetett lovag?

(A) *A 8.* **(B)** *A 9.* **(C)** *A 10.* **(D)** *A 11.* **(E)** *A 12.*

Megoldás: Az első és második megszólaló nem mondhatott igazat, mivel még nem szólaltak meg több, mint ketten. Így azok mindketten lókötők kellett legyenek. Mivel az első két ember lókötő volt, ezért a harmadik mondat igaz, így ő lovag. A negyedik állítása nem igaz, így ő csak lókötő lehet. Hasonlóan folytatva azt kapjuk, hogy ezután minden páratlanadik ember lovag, minden párosadik lókötő, így a válaszlehetőségek közül a 9. és a 11. ember lesz lovag.

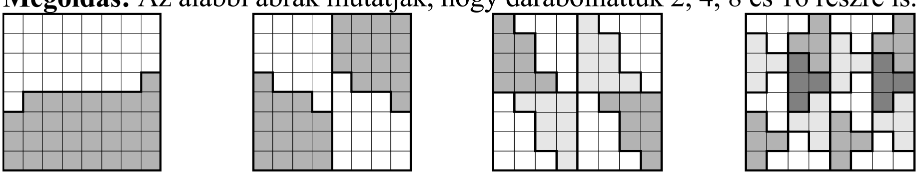
Helyes válasz(ok): B, D

6. A 8×8-as táblát a rácsegyenesek mentén azonos alakú és nagyságú nyolcszögekre daraboltam (más részek nem keletkeztek). Összesen hány részre darabolhattam szét e közben a táblát?



(A) *2* **(B)** *4* **(C)** *6* **(D)** *8* **(E)** *16*

Megoldás: Az alábbi ábrák mutatják, hogy darabolhattuk 2, 4, 8 és 16 részre is.



6 részre nem darabolhattuk, mivel feldarabolás után egy részbe eső kis négyzetek száma osztója kell legyen 64-nek, ám 64-nek a 6 nem osztója.

Helyes válasz(ok): A, B, D, E

7. Kinga felírt egy üres táblára néhány pozitív egész számot. A számok összege ugyanannyi lett, mint a számok szorzata. Hány számot írhatott Kinga az alábbiakból erre az üres táblára?

(A) *2-t* **(B)** *3-at* **(C)** *4-et* **(D)** *5-öt* **(E)** *6-ot*

Megoldás: Mindegyik lehetőségre találunk megfelelő számokat, amint az alább látható.
(A) $2+2=2\cdot 2$, (B) $1+2+3=1\cdot 2\cdot 3$, (C) $1+1+2+4=1\cdot 1\cdot 2\cdot 4$
(D) $1+1+1+2+5=1\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 5$, (E) $1+1+1+1+2+6=1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 6$

Helyes válasz(ok): A, B, C, D, E

8. Egy kocka lapjaira felírtuk a 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat, mindegyikre mást. A felső lapon lévő szám 5-tel kisebb, mint a mellette lévő négy lapon álló számok összege. Melyik szám lehet az alsó lapon?

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*

Megoldás: A négy szám összege legalább $1+2+3+4=10$. Az ennél 5-tel kisebb szám legalább 5. Így a felső lapon az 5 vagy a 6 állhat.
Ha a felső lapon az 5 áll, az oldalsó lapokon az 1, 2, 3, 4 számok, és az alsó lapon a 6 áll.
Ha a felső lapon a 6 áll, az oldalsó lapokon az 1, 2, 3, 5 számok, és az alsó lapon a 4 áll.

Helyes válasz(ok): C, E

9. Andi az írásbeli osztást gyakorolta. Mennyi lehet az osztási maradék, ha az osztandó páros szám, és az osztó, a hányados, a maradék mind különböző számok, és ez utóbbi három érték az alábbi számok közül való?

(A) *1* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*

Megoldás: Ha az osztó a, a hányados b, a maradék c, akkor az osztandó $a\cdot b+c$. Tekintettel arra, hogy ez páros szám, valamint a maradék kisebb az osztónál, ha az osztó 6, akkor a maradék csak (6-nál kisebb) páros szám lehet, van ilyen, ez a 4, a hányados ekkor „bármi” lehet, azaz 1, 3 vagy 5. Például $b = 5$ esetén a $6\cdot 5+4=34$-et osztottuk 6-tal, a hányados 5, a maradék 4. Tehát a maradék lehet 4.
Ha az osztó 5, akkor a 8-at osztva 1 a hányados, 3 a maradék. Illetve a 16-ot osztva 3 a hányados, 1 a maradék. Tehát a maradék lehet 1 is, 3 is.
A maradék nem lehet 6, mivel az osztó nagyobb a maradéknál, és most nem választhatunk 6-nál nagyobb osztót.

A maradék nem lehet 5, mert ekkor 6 az osztó, és a 6 többszöröséhez 5-öt adva nem kapunk páros számot. (Az osztandó a feltevés szerint páros.)

Helyes válasz(ok): A, B, C

10. Az ábrán lévő összeadótáblázatban a szürke mezőkben álló számok (4, 7, 3 és 5) a keretszámok, a fehér színű rész a művelettérület. Ha a négy keretszám négy egymást követő egész szám, akkor a művelettérben keletkező négy szám az alábbiakból melyik számnégyes lehet?

+	4	7
3	7	10
5	9	12

(A) *5,7,8,9* **(B)** *5,6,7,8* **(C)** *6,7,8,10* **(D)** *5,6,8,9* **(E)** *6,7,7,8*

Megoldás: Alább látható, hogy a művelettérben az adott feltételekkel lehet 5, 6, 8, 9, és 6, 7, 7, 8 is, így (D) és (E) jó válasz.

+	2	5
3	5	8
4	6	9

+	2	3
4	6	7
5	7	8

Megmutatjuk, hogy a többi eset nem valósulhat meg. Ugyanis 4 egymást követő egész szám közül kettő páros, kettő pedig páratlan. Ezért a művelettérben keletkező összegek, vagy 4 páratlan szám, vagy 2 páros és 2 páratlan. Emiatt nem keletkezhet az (A)-nál lévő 5, 7, 8, 9, és a (C)-nél lévő 6, 7, 8, 10 sem.
Hogy megmutathassuk, hogy (B) sem jó válasz, vegyük észre, hogy ha a keretszámok *a, b, c, d*, akkor a művelettérben lévő négy szám összege a keretszámok összegének kétszerese.

+	a	b
c	$c+a$	$c+b$
d	$d+a$	$d+b$

Ha a keretszámok egymást követő egészek, akkor a keretszámok összegének kétszerese osztható 4-gyel, azaz a művelettérben álló számok összege osztható 4-gyel. Ha a művelettérben 5, 6, 7, 8 keletkezne, akkor e négy szám összege 26, de ez nem osztható 4-gyel, tehát ezek sem lehetnek a művelettérben. Ha nem volna az az elvárás, hogy a keretszámok egymást követő egészek legyenek, akkor a művelettérben állhatnának az 5, 6, 7, 8 számok, amint alább látható.

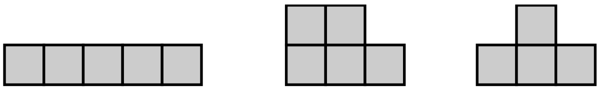
+	2	4
3	5	7
4	6	8

Helyes válasz(ok): D, E

11. Egy olyan sokszöget rajzoltam a négyzetrácsos lapon, melynek oldalai a rácsvonalakra illeszkednek, és a sokszög kerülete 10 egység. (A négyzetrácson két szomszédos rácspont távolsága 1 egység.) Hány csúcsa lehet a sokszögnek?

(A) *4* **(B)** *6* **(C)** *8* **(D)** *9* **(E)** *10*

Megoldás: Egy ilyen sokszög csúcsainak száma páros kell legyen. Induljunk el ugyanis a sokszög kerületén valamelyik csúcsból, és haladjunk végig a kerületen. Ha vízszintes oldalon kezdünk, akkor az oldalak iránya rendre vízszintes-függőleges, vízszintes-függőleges, …, vízszintes-függőleges. Függőleges oldalon érkezünk vissza, ezért páros az oldalak száma.
Tehát nem lehet 9 csúcsa a sokszögnek. Az ábrák mutatják, hogy 4, 6, illetve 8 csúcsa lehet.



4 csúcs 6 csúcs 8 csúcs

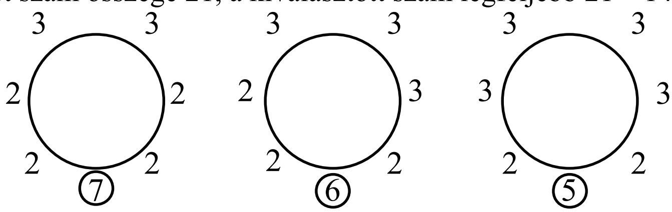
10 csúcs csak úgy lehetne, ha a sokszög minden oldala 1 egység hosszú volna. Ilyenkor viszont a vízszintes és a függőleges szakaszok összhossza is 5 lenne, ami nem lehet.

Helyes válasz(ok): A, B, C

12. Egy kör kerületére felírtam hét pozitív egész számot, melyek összege 21, és bármely három egymás melletti szám összege legalább 7. Az alábbiakból melyik lehet a hét szám közül a legnagyobb?

(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *7* **(D)** *8* **(E)** *9*

Megoldás: Válasszuk ki a hét szám egyikét. A bal oldalon mellette sorakozó három szám összege legalább 7, a jobb oldalon álló három szám összege is legalább 7, azaz a kiválasztott szám körül lévő hat szám összege legalább 14. Mivel a hét szám összege 21, a kiválasztott szám legfeljebb 21 – 14 = 7 lehet.



Tehát 7-nél nagyobb szám nem fordulhat elő a körön. Az ábrák mutatják, hogy a legnagyobb szám lehet 7, 6 és 5 is.

Helyes válasz(ok): A, B, C

13. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 számok közül tíz különböző szám összege 144. E tíz szám közül összesen hány lehet páros?

(A) *0* **(B)** *2* **(C)** *4* **(D)** *6* **(E)** *8*

Megoldás: A húsz szám között tíz páratlan szám van, azok összege 100, még hiányzik az összegből 44 ahhoz, hogy 144 legyen az eredmény. Ezért nem lehet mind a tíz szám páratlan, vagyis nem fordulhat elő, hogy a páros számok száma 0 legyen.
A tíz szám között páros számú páratlannak kell lennie, mivel az összeg páros (= 144).
Nézzük meg, hogy lehet-e 8 páratlan és 2 páros szám összege 144. A 8 legnagyobb páratlan (5, 7, 9, …, 19) és a 2 legnagyobb páros szám (18, 20) összege 134, ezért nincs tíz ilyen szám.
Vajon lehet-e 6 páratlan és 4 páros szám összege 144? Mivel $20+18+16+14=68$, így hat olyan páratlan számot keresünk, melyek összege $144-68=76$. Ilyen például a 19, 17, 15, 13, 11, 1. Tehát a tíz szám közül **lehet 4 páros** szám.
Most vizsgáljuk meg, hogy lehet-e 6 páros szám. A 6 legnagyobb páros szám összege $20+18+16+14+12+10=90$, ha hozzájuk választjuk még az 5, 19, 17, 13 számokat, akkor ennek a tíz számnak az összege 144. Tehát a 10 szám között **lehet 6 páros** szám.
Végül lássuk, lehet-e 8 páros szám. A 8 legnagyobb páros szám összege $20+18+16+14+12+10+8+6=104$, és a 2 legnagyobb páratlan szám összege 36, így ennek a tíz számnak az összege 140. Emiatt nem lehet a 10 szám között 8 páros szám.

Helyes válasz(ok): C, D

7. osztály

1. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyek valamilyen sorrendjével felírtunk egy olyan 7-jegyű számot, amelyben bármely két szomszédos jegy összege prímszám. Mi lehet a szám utolsó számjegye, ha az első számjegye 1?

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *6* **(E)** *7*

Megoldás: Az 1-es után írhatjuk a 2, 4 vagy a 6 számjegyeket, hogy a 3, 5, 7 prímeket kaphassuk.
Folytassuk az építkezéseket!
12 folytatódhat 123 vagy 125 módon. Az 123 folytatása csak 1234, 12347, 123476, 1234765 lehet. Az 125 folytatása csak 1256, 12567, 125674, 1256743 lehet.
14 folytatódhat 143 vagy 147 módon. Az 143 folytatása csak 1432, 14325, 143256, 1432567 lehet. Az 147 folytatása csak 1476, 14765, 147652, 1476523 lehet.
16 kezdés után kaphatjuk az 1652347, vagy az 1674325 számokat.
Tehát a szám utolsó jegye 3, 5 vagy 7 lehet.

Helyes válasz(ok): A, C, E

2. A $0<a<b<c<1$ számokra az alábbi állítások közül melyik lehet igaz?

(A) $a+b<c$ **(B)** $a+c<b$ **(C)** $a\cdot b<c$ **(D)** $a\cdot c<b$ **(E)** $\frac{b}{c}=a$

Megoldás: Az $a+b<c$ állítás teljesül például az $\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ számhármasra.

Mivel $b<c$ és $0<a$, így $b<c+a$, tehát $a+c<b$ lehetetlen.

Az $a\cdot b<c$ állítás teljesül például az $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ számhármasra.

Az $a\cdot c<b$ állítás teljesül például az $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ számhármasra.

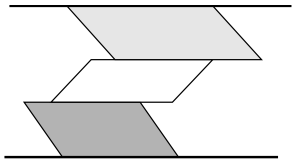
$\frac{b}{c}>b$, így $\frac{b}{c}>b>a$, tehát $\frac{b}{c}=a$ nem lehetséges.

Helyes válasz(ok): A, C, D

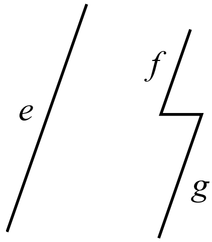
3. Egy sokszöget paralelogrammákra daraboltunk (más síkidomok nem keletkeztek). Összesen hány oldala lehet egy ilyen sokszögnek?

(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *7* **(D)** *8* **(E)** *9*

Megoldás: Válasszuk ki a sokszög egyik oldalát. A rá illeszkedő paralelogramma szemközti oldalára illeszkedik egy másik paralelogramma. A darabolásban résztvevő paralelogrammákból ezeket választva eljutunk a sokszög egy másik oldalához, amely párhuzamos a sokszög előbb kiválasztott oldalával.

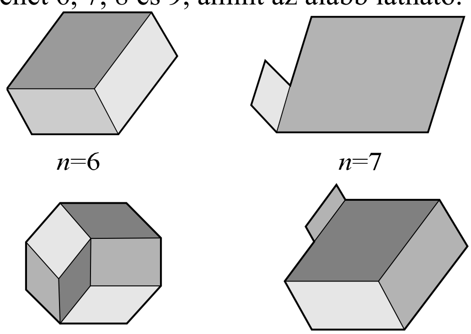


Ha a sokszögnek 5 oldala volna, akkor azokból 2, illetve 3 párhuzamos volna egymással. A 3 párhuzamos oldalra a lenti ábra mutat példát.



$e \parallel f \parallel g$

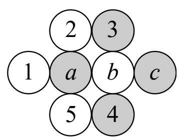
Ilyen sokszög azért nincs, mert az öt oldalból a három egymással párhuzamos közül valamelyik kettő szomszédos (azaz van közös csúcsuk), de ekkor ez a két párhuzamos oldal nem lehet különböző.
Tehát az oldalak száma nem lehet 5.
Az oldalak száma lehet 6, 7, 8 és 9, amint az alább látható.



n=6 n=7 n=8 n=9

Helyes válasz(ok): B, C, D, E

4. Az *a, b, c* természetes számokra fennáll, hogy az *a* szám a körülötte lévő négy fehér körben lévő számok átlaga, és a *b* szám a körülötte lévő négy szürke körben álló számok átlaga. Az alábbiakból melyik számot jelölheti *b*?



(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *8* **(E)** *12*

Megoldás: A feladat szerint $4a = 8 + b$ és $4b = 7 + a + c$.
Ezért $16a = 32 + 4b = 32 + (7 + a + c)$, azaz $15a = 39 + c$. Ezért $a \geq 3$.
Ha $a = 3$, akkor $c = 6$ és $b = 4$.
Ha $a = 4$, akkor $c = 21$ és $b = 8$.
Ha $a = 5$, akkor $c = 36$ és $b = 12$.

Nagyobb a esetén b még nagyobb volna, de olyan már nincs a válaszlehetőségek között.

Helyes válasz(ok): B, D, E

5. Peti felvett a síkon 9 különböző pontot úgy, hogy azokból semelyik három nem esik egy egyenesre, majd minden pontpárt szakasszal kötött össze. Ezután felvett egy olyan egyenest is, amelyik a 9 pont egyikén sem megy át, és nem megy át semelyik két szakasz metszéspontján sem. Pontosan hány metszéspontja lehet az egyenesnek ezekkel a szakaszokkal?

(A) *8* **(B)** *10* **(C)** *12* **(D)** *14* **(E)** *18*

Megoldás: A pontok számát az egyenes egyik oldalán jelölje a, a másik oldalon b. Így $a + b = 9$. Az egyenes olyan szakaszt metsz, amely az egyenes két különböző oldalán fekvő két pontot köt össze. Az ilyen szakaszok száma $a \cdot b$. A lehetséges (a, b) számpárok: (9, 0), (8, 1), (7, 2), (6,3), (5, 4). Ekkor a megfelelő $a \cdot b$ szorzatok rendre: 0, 8, 14, 18, 20.

Helyes válasz(ok): A, D, E

6. Matematikaórán a tanár felírt a táblára egy számot, majd egymás után felszólított nyolc diákot. Mindegyik diák mondott egy állítást:

1. A szám osztható 3-mal, de nem osztható 2-vel.
2. A szám osztható 4-gyel, de nem osztható 3-mal.
3. A szám osztható 5-tel, de nem osztható 4-gyel.
4. A szám osztható 6-tal, de nem osztható 5-tel.
5. A szám osztható 7-tel, de nem osztható 6-tal.
6. A szám osztható 8-cal, de nem osztható 7-tel.
7. A szám osztható 9-cel, de nem osztható 8-cal.
8. A szám osztható 10-zel, de nem osztható 9-cel.

A nyolc állításból hány állítás lehet igaz?

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *5*

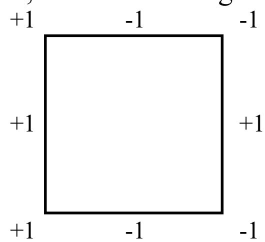
Megoldás: Két egymást követő állítás mindegyike nem lehet igaz, ezért legfeljebb 4 igaz állítás lehet.
Ha 4 igaz állítás van, akkor ezek: az 1., 3., 5. és 7. állítások; vagy a 2., 4., 6. és 8. állítások. Első esetben a szám osztható a 3, 5, 7, 9 számokkal, és nem osztható a 2, 4, 6, 8 számokkal. Ez lehet igaz, ha a felírt szám $5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$.
3 igaz állítás van, ha a felírt szám 120. Ekkor az igaz állítások: osztható 6-tal és 5-tel nem; osztható 8-cal és 7-tel nem; osztható 10-zel és 9-cel nem.
2 igaz állítás van, ha a felírt szám 24. Ekkor az igaz állítások: osztható 6-tal és 5-tel nem; osztható 8-cal és 7-tel nem.
1 igaz állítás van, ha a felírt szám például 3.

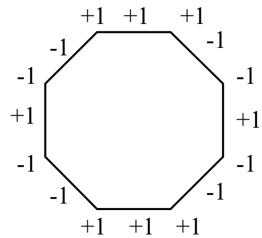
Helyes válasz(ok): A, B, C, D

7. Egy szabályos sokszög mindegyik csúcsában egy-egy szám állt, az 1 vagy a -1. Ezután minden oldalra ráírtuk az oldal két végén álló szám szorzatát. Összeadtuk az oldalakon álló számokat, és az összeg értéke 0 lett. Összesen hány oldala lehetett ennek a sokszögnek?

(A) *4* **(B)** *5* **(C)** *6* **(D)** *7* **(E)** *8*

Megoldás: Az n-oldalú sokszög minden csúcsába írjunk 1-et. Ekkor az oldalakra írt szorzatok értéke is 1, és az oldalakra írt számok összege n.
Valamelyik csúcsban cseréljük ki az 1-et –1-re. Ekkor két szorzat értéke 1-ről –1-re változik, emiatt az összeg 4-gyel csökken.





Ezt követően is egy-egy csúcsban cseréljük az 1-et –1-re. Egy ilyen csere után két szorzat értéke fog megváltozni. Ha mindkét szorzat 1, és ezek –1-re változnak, akkor a szorzatok összege 4-gyel csökken. Ha mindkét szorzat –1-ről 1-re változik, akkor az összeg 4-gyel nő. Ha az egyik szorzat 1-ről –1-re, a másik –1-ről 1-re változik, akkor az összeg értéke változatlan marad.
Ilyen cserékkel a csúcsok bármelyik számozásához eljuthatunk. A szorzatok összege a kezdeti n-ről lépésenként 4-gyel változik, nő vagy csökken. Így az összeggel 0-ra csak akkor juthatunk, ha n osztható 4-gyel. Ezért (B), (C), (D) válaszok nem jók.
A fenti ábrák mutatják, hogy $n = 4$ és $n = 8$ esetén a csúcsoknak van olyan számozása, amikor a szorzatok összege 0.

Helyes válasz(ok): A, E

8. Választottunk négy különböző számjegyet és ezek alkalmas sorrendjével elkészítettük a lehetséges legnagyobb és legkisebb négyjegyű számot. A két szám összege 10477 lett. Az alábbiakból melyik számjegy szerepelhetett a kiválasztott négy számjegy között?

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4*

(E) *A feltételek szerint nem lehet négy számjegyet kiválasztani.*

Megoldás: Ha a számjegyek különböznek 0-tól, akkor legyen $a < b < c < d$.
A feltételek szerint:

$$\overline{dcba} + \overline{abcd} = 10477 \text{, azaz } 1001 \cdot (a + d) + 110 \cdot (b + c) = 10477 .$$

A bal oldal osztható 11-gyel, a jobb oldal nem. Tehát ekkor nincs megoldás.
Meg kell vizsgálnunk még azt az esetet, amikor a négy számjegy közül az egyik számjegy, $a = 0$.
Ebben az esetben más sorrendbe rendezve kapjuk a legnagyobb, illetve legki-

sebb számot. Ekkor az összeg:

$$\overline{dcb0}+\overline{b0cd}=10477\text{, vagyis } 1001d+1010b+110c=10477.$$

Itt az összeg utolsó számjegye miatt $d=7$.

Ezt behelyettesítve: $1010b+110c=3470$, $101b+11c=347$.

Mivel b és c számjegyek, így a nagysági viszonyok miatt $b=3$, majd $c=4$ adódik. Ellenőrizve, valóban $7430+3047=10477$.

Helyes válasz(ok): C, D

9. Az Óperenciás tengeren egy vulkán körül köralakban kilenc különböző méretű sziget sorakozik. A szomszédos szigeteket pontosan egy híd köti össze, így minden szigetről két híd indul. Bence a legnagyobb szigetről indul, végigjárja a szigeteket, és végül visszatér a kiinduló szigetre. Útja során minden hídon pontosan kétszer haladt végig. Összesen hány ilyen különböző útvonal létezik?

(A) *9* **(B)** *18* **(C)** *20* **(D)** *22* **(E)** *24*

Megoldás: Bence útja során megtehet azonos irányban haladva két teljes kört. Ilyen út 2 van, hiszen vagy az egyik, vagy a másik irányba indul el, és abban az irányban haladva teszi meg a két kört.

Másik lehetőség az, hogy elindul valamelyik irányba, és amíg nem kezdte el a második kört, az egyik szigeten visszafordul, így megtesz egy teljes kört és még folytatja az útját a legnagyobb szigetig. Bármelyik szigeten visszafordulhat (a legnagyobbikon is), így 9 helyen fordulhat meg, és ez 18 új útvonalat jelent, mivel a kiinduló szigetről kétféle irányban indulhat.

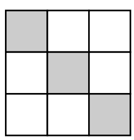
Így összesen 2 + 18 = 20 különböző útvonal van.

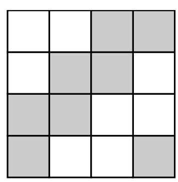
Helyes válasz(ok): C

10. Egy $n\times n$-es táblázat mezőinek egy része fekete színű, a többi fehér. Bárhogyan is választunk ki két sort és két oszlopot, ezek metszéspontjaiban lévő négy mező között van fehér is, fekete is. Mennyi lehet így n értéke?

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *6* **(E)** *7*

Megoldás: $n=3$ és $n=4$ esetén van megfelelő színezés, amint az alább is látható.





Most belátjuk, hogy az 5×5-ös táblázatot nem lehet jól színezni, azaz bármilyen színezés esetén találunk két sort és két oszlopot, melyek metszéspontjaiban lévő mezők azonos színűek. Nevezzük ezt egyszínű téglalapnak.

A táblázat minden sorában van legalább 3 azonos színű mező. Az 5 sorból kiválasztható 3 olyan sor, melyek mindegyikében van legalább 3 fekete mező, vagy van 3 olyan sor, melyek mindegyikében van legalább 3 fehér mező.

Nézzük ezt a 3 sort, melyek mindegyikében van legalább 3 fekete mező, ez összesen legalább 9 fekete mező. Vizsgáljuk meg, hány fekete mező jut ezekből az egyes oszlopokba! Ha egy oszlopban 3, és egy másik oszlopban (legalább) 2 fekete mező van, akkor van egyszínű téglalap. Ha van négy oszlop, melyekben (legalább) 2-2 fekete mező van, akkor is felbukkan az egyszínű téglalap. Tegyük fel, hogy elkerülhető ez a két eset. Ekkor egy oszlopban lehet 3 fekete mező, a többi oszlopban legfeljebb 1-1 fekete mező lehet. Ez összesen $3+1+1+1+1=7$ mező, ám 9 fekete mező van. Lehet három oszlopban 2-2 fekete mező, és van még két oszlop, ezekben legfeljebb 1-1 fekete mező, ami összesen csak $2+2+2+1+1=8$ mező. Tehát a két eset mindegyike nem kerülhető el, tehát mindenképpen felbukkan az egyszínű téglalap.
Ha az 5×5-ös táblázatot nem lehet jól színezni, akkor $n>5$ esetén sem lehet jól színezni az $n\times n$-es táblázatot sem.

Helyes válasz(ok): A, B

11. Az asztalon fekvő nyolc számkártyán az 1, –2, –3, 4, –5, 7, –8, 9 számokat látjuk (mindegyiken mást). A lapokat megfordítjuk, átrendezzük a sorrendjüket, majd a lapoknak a felső oldalára felírjuk ugyanezt a nyolc számot (most is mindegyikre mást). Ezután kiszámoljuk mindegyik lapnál a rajta lévő két szám összegét. Mennyi lehet az így kapott nyolc összegnek a szorzata?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *4* **(D)** *6* **(E)** *16*

Megoldás: A szorzat nem lehet 0, mert a nyolc szám között nincs olyan, melynek az ellentettjét is látjuk.
A nyolc szám között öt páratlan és három páros, emiatt az öt páratlan szám mögé nem kerülhet csupa páros szám. Legalább két páratlan szám mögött is páratlan szám lesz. Tehát a kártyákon számolt összegek között lesz két páros, így a szorzat 4-gyel osztható. Mivel az 1 és a 6 nem osztható 4-gyel, ezért 1 és 6 sem lehet a szorzat.
A szorzat lehet 4, ha például a számpárok:
(1, –2), (–2, 1), (–3, 4), (4, –3), (–5, 7), (7, –5), (–8, 9), (9, –8).
A szorzat lehet 16, ha a számpárok:
(1, –2), (–2, 1), (–3, 7), (7, –3), (–5, 4), (4, –5), (–8, 9), (9, –8).

Helyes válasz(ok): C, E

12. Az alábbiakból melyik szám lehet osztója két szomszédos kétjegyű szám szorzatának?

(A) *120* **(B)** *125* **(C)** *128* **(D)** *143* **(E)** *216*

Megoldás: A 120, 143, 216 számok lehetnek osztói két szomszédos egész szorzatának, ugyanis
$120=3\cdot40\mid39\cdot40$
$143=13\cdot11\mid65\cdot66$
$216=8\cdot27\mid80\cdot81$

$125 = 5^3 = 5 \cdot 25$ nem lehet osztója két szomszédos egésznek, hiszen van 25-tel osztható kétjegyű szám, és 125-tel osztható nincs, ezért a 25-tel osztható kétjegyű szám szomszédjának 5-tel oszthatónak kell lennie. És ez nem lehet.

$128 = 2^7 = 2 \cdot 64$ sem lehet osztója két szomszédos egésznek, mivel két szomszédos egész egyike páros, a másik páratlan. A páros kétjegyű szám legfeljebb 64-gyel osztható.

Helyes válasz(ok): A, D, E

13. Bence felírt a táblára *n* darab egész számot. A számok összege is *n*, szorzata is *n*. Mennyi lehet *n* értéke?

(A) *6* **(B)** *7* **(C)** *8* **(D)** *9* **(E)** *10*

Megoldás: Vegyük sorra a válaszlehetőségeket!
Hat szám szorzata úgy lenne 6, ha az egyik páros, a többi öt szám pedig páratlan. Ennek a hat számnak az összege így páratlan, tehát nem lehet 6.
Hét szám szorzata csak úgy lenne 7, ha egyikük 7 (vagy -7), a többi hat szám 1 és -1, és a -1-ek száma páros (mivel a -7-hez páratlan számú -1 tartozik). Azonban egyik esetben sem lehet a hét szám összege 7.
Nyolc megfelelő szám van:

$$4, 2, 1, 1, -1, -1, 1, 1;$$

és kilenc is:

$$9, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1$$

Tíz szám szorzata úgy lehetne 10, ha az egyik páros, a többi kilenc pedig páratlan. Ennek a tíz számnak az összege páratlan, tehát nem lehet 10.

Helyes válasz(ok): C, D

8. osztály

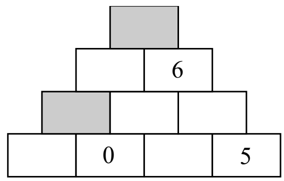
1. Bice kapitány és Bóca kapitány egy 300 mérföldes egyenes tengeri út két végéről egyszerre indulnak el hajóval a másik irányába. A teljes távolságot Bice hajója 6 óra, Bóca hajója 12 óra alatt tenné meg. Hány óra múlva lesz a két hajó egymástól pontosan 75 mérföld távolságra, ha mindketten egyenletes sebességgel haladnak a megkezdett irányba?

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *5*

Megoldás: Az első hajó 50 mérföldet, a második 25 mérföldet tesz meg óránként, így a távolságuk 75 mérfölddel csökken óránként. 3 óra alatt megtesznek 75, illetve 150 mérföldet, ekkor éppen 75 mérföldre lesznek egymástól. Azonban ezt követően közelednek egymáshoz, aztán találkoznak, majd távolodnak egymástól. 4 óra alatt 100, illetve 200 mérföldet haladtak, így 4 óra elteltével találkoznak. Újabb 1 óra elteltével (az indulástól számítva 5 óra múlva) 25 és 50 mérföldet tesznek meg, így ekkor is 75 mérföldre lesznek egymástól.

Helyes válasz(ok): C, E

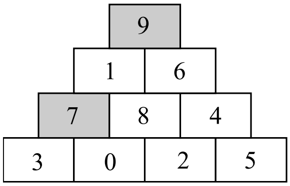
2. Írjátok be a piramis üres mezőibe az 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9 számjegyeket úgy, hogy mindegyik számjegy pontosan egyszer szerepeljen, és mind a négy sorban négyzetszám álljon, soronként egy-, kettő-, három-, illetve négyjegyű négyzetszám. Mennyi lehet a két befestett mezőben álló szám összege?

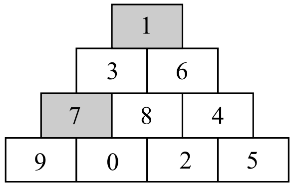


(A) *8* **(B)** *9* **(C)** *10* **(D)** *13* **(E)** *16*

Megoldás: Az alsó sorban egy 5-re végződő négyjegyű négyzetszám áll. Ehhez a 35, 45, 55, 65, 75, 85, ill. 95 számok négyzeteit kell megnéznünk. Két lehetőség adódik, $55^2 = 3025$ és $95^2 = 9025$, mivel a többinek a százasok helyén nem 0 áll.
Első esetben a felülről második sorban csak a 16 állhat.
A megmaradó 4, 7, 8, 9 számjegyeket kell még elhelyezni a felső és a felülről harmadik sorban. A felső sorba 4 vagy 9 kerülhet. Ha 4-et írunk, akkor a felülről harmadik sorba (tekintettel a négyzetszámok lehetséges utolsó számjegyére) 789 vagy 879 kerülhet, ám egyik sem négyzetszám. Így már csak egy lehetőség marad, ezt mutatja a bal oldali ábra. $\left(784 = 28^2\right)$

Ha az alsó sorban 9025 áll, akkor felülről a második sorban nem lehet 16, mert a megmaradó 3, 4, 7, 8 számjegyek közül csak 4-re végződhet négyzetszám, így nem fejezhető be a kitöltés. Tehát a felülről második sorban 36-nak kell állnia. A megmaradó számjegyekből a felső sorba az 1 vagy a 4 kerülhet. Ha a 4, akkor a felülről harmadik sorban 781 vagy 871 áll, ám ezek nem négyzetszámok. A megmaradó lehetőség szerint adódik a jobb oldali kitöltés.



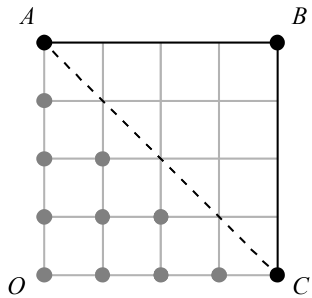


Helyes válasz(ok): A, E

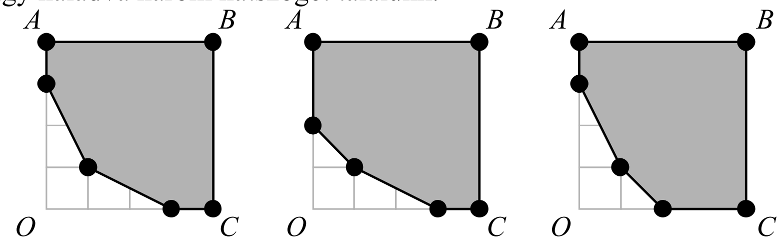
3. Egy konvex (domború) hatszög három csúcsa $A(0;4)$, $B(4;4)$, $C(4;0)$, és a többi csúcsának koordinátái is nemnegatív egész számok. Az alábbi pontok közül melyik lehet a hatszög valamelyik csúcsa?

(A) $(0;3)$ **(B)** $(0;2)$ **(C)** $(0;1)$ **(D)** $(1;1)$ **(E)** $(2;1)$

Megoldás: A konvexitás miatt a hatszög további csúcsai az AC egyenes alatt kell, hogy legyenek.



A koordináták nemnegatívsága miatt ezek a csúcsok a 10 színezett pont közül valók.
Keressük meg a konvex hatszögeket, melyek csúcsai ezek közül kerülnek ki!
Választunk egy negyedik csúcsot a színezett pontok közül, ezt összekötjük az A és a C csúcsokkal, az ötödik és hatodik csúcs az összekötő egyenesek alatt van. Így haladva három hatszöget találunk.



Az ábrákról leolvashatjuk, hogy a válaszlehetőségek között szereplő csúcsok közül a (0;3), (0; 2) és (1; 1) lehet csúcsa a hatszögnek.

Helyes válasz(ok): A, B, D

4. Egy kétjegyű szám minden hatványa ugyanerre a kétjegyű számra végződik. Mennyi lehet e szám jegyeinek összege?

(A) *7* **(B)** *9* **(C)** *11* **(D)** *13* **(E)** *15*

Megoldás: Elég azt vizsgálni, hogy a szám négyzete ugyanarra a kétjegyű számra végződik. Ha a keresett szám *a*, akkor $100 \mid a^2 - a = a(a-1)$. Az a szám kétjegyű és relatív prím $(a-1)$-hez, $100 = 4 \cdot 25$, ezek miatt a és $(a-1)$ egyike osztható 4-gyel, a másik 25-tel.

Ha *a* osztható 25-tel, akkor *a* értéke 25, 50 vagy 75. Ekkor $(a-1)$ értéke 24, 49, illetve 74. Közülük csak 24 osztható 4-gyel. Így az *a* = 25 megfelel az elvárásainknak.

Ha $(a-1)$ osztható 25-tel, akkor az értéke 25, 50 vagy 75, így *a* értéke 26, 51 vagy 76. Közülük csak 76 osztható 4-gyel. Így *a* = 76 is megfelelő érték.

A keresett kétjegyű szám 25 vagy 76. Ezekben a számjegyek összege 7, illetve 13.

Megjegyzés: Megoldhatjuk a feladatot úgy is, hogy előbb azt nézzük, mi lehet a szám utolsó számjegye, és ezután az első jegyét.

Helyes válasz(ok): A, D

5. Egy szabályos háromszöget a középpontja körül pozitív irányba elforgatunk először $3°$-kal, azután tovább forgatjuk $9°$-kal, majd $27°$-kal, a *k*-adik lépésben 3^k fokkal. Összesen hány különböző helyzetet vehet fel a háromszög az elforgatások eredményeképpen, ha 2024 alkalommal forgatjuk a feltételek szerint? (Két helyzet akkor azonos, ha az oldalak páronként fedik egymást.)

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *6* **(E)** *6-nál több*

Megoldás: A háromszög két elforgatottja akkor esik egybe, ha az elforgatások szögének különbsége osztható $120°$-kal.

Ha $n \geq 1$, akkor $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} + 3^{n+3} = (3+9+27+81) \cdot 3^{n-1} = 120 \cdot 3^{n-1}$.

Ezért bármelyik 4 szomszédos elforgatás egymás utánja nem hoz létre új helyzetet. Így csak a kiinduló állapot és az első 3 elforgatott lesz különböző.

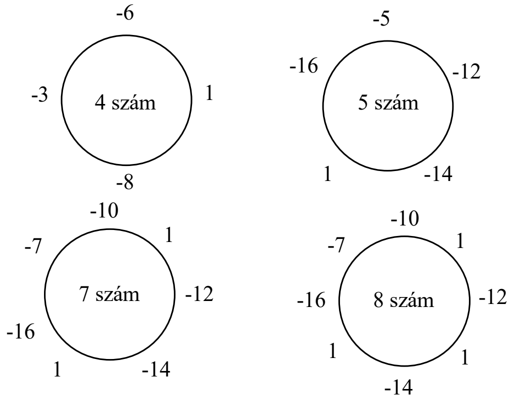
Helyes válasz(ok): B

6. Egy kör kerületére felírtunk néhány egész számot úgy, hogy mindegyik szám nagyobb, mint az óramutató járása szerint az utána következő két szám összege. A felírt számok között van pozitív szám is. Az alábbiakból összesen hány számot írhattunk fel így a kör kerületére?

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *7* **(E)** *8*

Megoldás: Nézzük, mi történik, ha 3 számot írtunk a körre. Legyen a három egymás utáni szám *a, b, c*. Ezek valamelyike pozitív. Ha mindhárom pozitív (nemnegatív), akkor a legkisebb (a legkisebbek egyike) nem lehet nagyobb a

másik kettő összegénél.
Ugyanígy két pozitív (nemnegatív) szám sem lehet, mert azok összege nagyobb a harmadik számnál.
Tehát legfeljebb egy pozitív szám van a körön, a másik kettő negatív. Válaszszuk ki a két negatív szám közül a kisebbiket. Ez nem lehet nagyobb, mint a tőle nagyobb negatív szám és egy pozitív szám összege. Tehát az elvárt módon nem lehet 3 számot felírni.
Amint azt alább láthatjuk 4, 5, 7 vagy 8 számot felírhatunk a körre a kívánt módon.



Helyes válasz(ok): B, C, D, E

7. Két pozitív kétjegyű szám szorzata csupa azonos jegyből álló szám. Az alábbiakból mennyi lehet e két szám összege?

(A) *52* **(B)** *53* **(C)** *61* **(D)** *86* **(E)** *90*

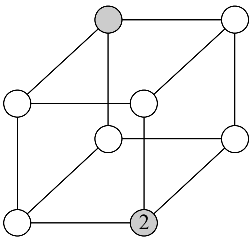
Megoldás: Két kétjegyű szám szorzata nem lehet négyjegyű csupa azonos jegyből álló szám, mert ezek a számok $\overline{aaaa} = \overline{aa}00 + \overline{aa} = \overline{aa} \cdot 101$ szorzatra bonthatók, és a 101 háromjegyű prímszám.
Ha a szorzat 3-jegyű szám, akkor A, illetve B-vel jelölve a kétjegyű számokat, $A \cdot B = \overline{aaa} = a \cdot 111 = a \cdot 3 \cdot 37$, ahol $a = 1, 2, \ldots, 9$.
Az $a \cdot 3 \cdot 37$ szorzat két kétjegyű szám szorzata csak $(a \cdot 3) \cdot 37$ vagy $(b \cdot 3) \cdot (2 \cdot 37)$ alakban lehetséges, ahol $a = 2b$.
Az $A = (a \cdot 3)$ és $B = 37$ esetben $a = 4, 5, 6, 7, 8, 9$, azaz $A = 12, 15, 18, 21, 24, 27$. Az $A + B$ összeg lehetséges értékei ekkor 49, 52, 55, 58, 61, 64, amelyek közül 52 és 61 megtalálható a válaszlehetőségeinkben.
A második lehetőségnél 3b kétjegyű és $2b$ (= a) egyjegyű. Ezért $b = 4$, és a megfelelő szorzat $A = 4 \cdot 3 = 12$ és $B = 2 \cdot 37 = 74$.
Ekkor $A + B = 12 + 74 = 86$.

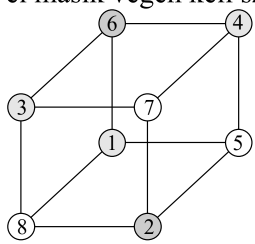
Helyes válasz(ok): A, C, D

8. Egy kocka csúcsaira felírtuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számokat (mindegyikre mást). Bence leírta, hogy a kocka egy-egy lapján melyik négy szám van, és növekvő sorrendbe rendezve lejegyezte: (1,2,5,8), (3,4,6,7), (2,4,5,7), (1,3,6,8), (2,3,7,8) és (1,4,5,6). Melyik szám kerülhetett annak a testátlónak a másik végére, amelyiknek az egyik végén a 2-es van?

(A) *1* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*

Megoldás: Nézzük azt a három lapot, amelyen rajta van a 2-es! Ezek: (1,2,5,8), (2,4,5,7), (2,3,7,8).
Az 1, 3, 4 számok mindegyike egyszer szerepel ebben a felsorolásban, ezért ezek a kocka egy-egy lapján a 2-essel szemközti csúcsban vannak. Ezeket beírtuk a jobbra lévő ábrának megfelelően. Az 5, 7 és 8 számok kétszer szerepelnek, emiatt a 2-esből induló valamelyik él másik végén kell szerepeljenek.





Így a megmaradó 6-os szám lesz a 2-esből induló testátló másik végén.
Egyszerűbb indoklás. A 2-essel szemközti csúcs kivételével mindegyik csúcs együtt szerepel a kocka valamelyik lapján a 2-essel. Az (1, 2, 5, 8), (2, 4, 5, 7), (2, 3, 7, 8) felsorolásban egyetlen szám nem szerepel, ez a 6-os, ezért a 2-essel szemben a 6-os van.

Helyes válasz(ok): E

9. Három fiú az a, b, c természetes számokról a következő két-két kijelentést tette:
Ati: 1) $a+b+c=34$; 2) $abc=56$
Béla: 1) $ab+bc+ac=311$; 2) a, b, c közül a legkisebb osztható 5-tel
Csaba: 1) $a=b=c$; 2) az a, b és c számok prímszámok.
Ha tudjuk, hogy mindegyikük állítása közül egyik igaz és a másik hamis, melyik lehet az a, b, c számok valamelyike?

(A) *3* **(B)** *5* **(C)** *13* **(D)** *15* **(E)** *19*

Megoldás: Ha Ati második állítása igaz volna, akkor Csaba mindkét állítása hamis lenne. Ezért Ati első állítása igaz. Ekkor azonban Csaba első állítása nem lehet igaz, így Csaba második kijelentése kell igaz legyen, vagyis mindhárom számnak prímnek kell lennie. Ha mindhárom prímszám páratlan volna, akkor összegük is páratlan lenne. Mivel $a+b+c=34$ páros, így az egyik szám a 2. Legyen $a=2$. Ennél kisebb prímszám nincs, így Béla második kijelentése nem lehet igaz, ezért az első állítása szerint $ab+bc+ac=311$.
Az a helyére 2-t írva az $a+b+c=34$, valamint ez utóbbi egyenlőségbe, azt kapjuk, hogy $b+c=32$ és $2b+bc+2c=311$ vagyis $2\cdot(b+c)+bc=311$,

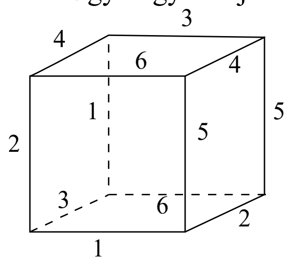
ahonnan $2 \cdot 32 + bc = 311$, azaz $bc = 247$.
Mivel b és c is prímszám és $247 = 13 \cdot 19$, ezért a hiányzó számok a 13 és a 19.

Helyes válasz(ok): C, E

10. Egy kocka éleit többféle színnel színeztük úgy, hogy mindegyik él egyféle színt kap, és bármely két különböző színhez találunk két ilyen színű élt, melyek közös csúcsra illeszkednek. Hány színt használhattunk így a színezéshez?

(A) *4* **(B)** *5* **(C)** *6* **(D)** *7* **(E)** *8*

Megoldás: Minden csúcsnál 3 él-párt választhatunk, melyek arra a csúcsra illeszkednek. Így összesen $8 \cdot 3 = 24$ olyan él-párt választhatunk, melyeknek van közös végpontja. Emiatt 8 színnel nem színezhettünk, mert akkor $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ szín-pár létezne, ami több 24-nél. 7 szín esetén nincs ilyen probléma, mert a szín-párok száma csak 21. Azonban ez mégsem lehet, mivel a kockának 12 éle van, így a 7 szín valamelyikével csak 1 élet színeztünk, és ez az él csak 2 + 2 = 4 éllel szomszédos (azaz van közös csúcsuk), noha 6 más színű éllel kellene szomszédosnak lennie. Az alább lévő ábrán látható, hogy 6 színnel színezhettünk. Ha van 6 színnel jó színezés, akkor van 5 színnel is, pl. a 6-os szín helyett legyen 5-ös szín. Ugyanígy van jó színezés 4 színnel is.



Helyes válasz(ok): A, B, C

11. Az alábbiakból melyik szám nem lehet osztója két szomszédos kétjegyű szám szorzatának?

(A) *120* **(B)** *125* **(C)** *128* **(D)** *143* **(E)** *216*

Megoldás: A 120, 143, 216 számok lehetnek osztói két szomszédos egész szorzatának, ugyanis
$120 = 3 \cdot 40 \mid 39 \cdot 40$
$143 = 13 \cdot 11 \mid 65 \cdot 66$
$216 = 8 \cdot 27 \mid 80 \cdot 81$

$125 = 5^3 = 5 \cdot 25$ nem lehet osztója két szomszédos egésznek, hiszen van 25-tel osztható kétjegyű szám, és 125-tel osztható nincs, ezért a 25-tel osztható kétjegyű szám szomszédjának 5-tel oszthatónak kell lennie. És ez nem lehet.

$128 = 2^7 = 2 \cdot 64$ sem lehet osztója két szomszédos egésznek, mivel két szomszédos egész egyike páros, a másik páratlan. A páros kétjegyű szám legfeljebb

64-gyel osztható.

Helyes válasz(ok): B, C

12. Adott néhány (nem feltétlen különböző) természetes szám. Ennek a számhalmaznak a burkát úgy kapjuk, hogy felírjuk újra őket és még a számokból képezhető összes két-, három-, … tagú összeget, és az így kapott és az eredetileg adott számokból kitöröljük az ismétlődéseket, azaz, ha egy szám többször szerepel, akkor csak egyet tartunk meg közülük. A megmaradó számok alkotják a megadott számhalmaz burkát. Például a 2, 3, 5 számok burka: 2, 3, 5, 7, 8, 10. Az alábbiak közül melyik lehet valamely számhalmaznak a burka?

(A) *1, 2, 3, 4* **(B)** *1, 2, 3, 4, 6* **(C)** *1, 2, 4, 5, 6*

(D) *1, 3, 4, 6, 7, 8* **(E)** *1, 2, 3, 5, 6, 7, 8*

Megoldás: Az 1, 1, 1, 1 számhalmaz burka 1, 2, 3, 4.
Az 1, 1, 4 számhalmaz burka 1, 2, 4, 5, 6.
Az 1, 1, 1, 5 számhalmaz burka 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8. Így (A), (C) és (E) jó válaszok.
A burok legnagyobb száma az alaphalmazban lévő számok összege. A legkisebb szám az alaphalmaz legkisebb száma. A burokban a második legnagyobb szám az alaphalmaz legkisebb számát kivéve a többiek összege, azaz a burok legnagyobb számából elvesszük a legkisebb számot. Emiatt az 1, 2, 3, 4, 6 nem alkot burkot, mert ha az volna, akkor a burokban kellene lennie a legnagyobb és legkisebb szám különbségének is, ami 6 – 1 = 5.
Maradt annak vizsgálata, hogy 1, 3, 4, 6, 7, 8 lehet-e burok. Azt tudjuk, hogy a számok összege 8 lesz, és azt is tudjuk, hogy benne néhány szám összege az 6. Most vegyük az ebből az összegből kimaradó számo(ka)t, azoknak az öszszege 2 lesz, de ez nincs a burokban, ami ellentmondás. Így nincs olyan alaphalmaz, aminek 1, 3, 4, 6, 7, 8 a burka.

Helyes válasz(ok): A, C, E

13. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyekből nyolc különböző számjegyet használva négy kétjegyű prímet készítettünk. Mennyi lehet ennek a négy prímnek az összege?

(A) *190* **(B)** *210* **(C)** *220* **(D)** *230* **(E)** *250*

Megoldás: A kétjegyű prímek utolsó számjegye nem lehet 2, 4, 6, 8 és 5. Tehát ezek valamelyikét kivéve, a megmaradó nyolc számjegyből alkotjuk a négy kétjegyű prímet.
Ha a 2 marad ki, akkor a négy prímben a tízesek helyén álló számjegyek 4, 5, 6, 8, az egyesek helyén 1, 3, 7, 9. Ha van négy ilyen prím, akkor az összegük: $(4+5+6+8)\cdot 10+(1+3+7+9)=250$. Négy ilyen prím van is: 41, 59, 67, 83.

Ha a 4 marad ki, akkor a négy prímben a tízesek helyén 2, 5, 6, 8 áll, az egyesek helyén 1, 3, 7, 9. Ha van négy ilyen prím, akkor az összegük: $(2+5+6+8)\cdot 10+(1+3+7+9)=230$. Négy ilyen prím azonban nincs, mert

a 2, 5 és 8 után írható második számjegy 3 és 9. (A 23, 29, 53, 59 és 83, 89 prímek lehetnek, nincs más 2-vel, 5-tel, 8-cal kezdődő prím.) Azaz 3 számjegyhez (2, 5 és 8) csak kétféle számjegyből választhatunk.
Ha az 5 marad ki, akkor a négy prímben a tízesek helyén 2, 4, 6, 8 áll, az egyesek helyén 1, 3, 7, 9. Ha van négy ilyen prím, akkor az összegük: $(2+4+6+8)\cdot 10+(1+3+7+9)=220$. Ilyen prímek pedig vannak:
23, 47, 61, 89.
Ha a 6 marad ki, akkor a négy prímben a tízesek helyén 2, 4, 5, 8 áll, az egyesek helyén 1, 3, 7, 9. Ha van négy ilyen prím, akkor az összegük: $(2+4+5+8)\cdot 10+(1+3+7+9)=210$. Ilyen prímek nincsenek, és ennek indoklása egyezik azzal, amikor a 4 maradt ki.
Ha a 8 marad ki, akkor a négy prímben a tízesek helyén 2, 4, 5, 6 áll, az egyesek helyén 1, 3, 7, 9. Ha van négy ilyen prím, akkor az összegük: $(2+4+5+6)\cdot 10+(1+3+7+9)=190$. Ilyen prímek a következők:
23, 47, 59, 61.

Helyes válasz(ok): A, C, E